Das kleine Einmaleins

Kompetenzerwartungen

Jahrgangsstufen 1/2	Jahrgangsstufen 3/4
M 1.2 Im Zahlenraum bis Hundert rechnen und Strukturen nutzen Die Schülerinnen und Schüler • ordnen den vier Grundrechenarten jeweils verschiedene Handlungen und Sachsituationen zu und umgekehrt (... Multiplikation als zeitlich-sukzessives Vervielfachen oder räumlich-simultane Gegebenheit; Division – auch mit Rest – als Aufteilen oder Verteilen); sie begründen die Zusammenhänge zwischen den Grundrechenarten • wenden Kernaufgaben des kleinen Einmaleins (Einmaleinssätze mit 1,2,5,10 und die Quadratsätze), deren Umkehrungen (z.B. 14:7=2 oder 14:2=7 als Umkehrungen von 2·7=14) sowie Malaufgaben mit 0 automatisiert und flexibel an. • nutzen die Kernaufgaben des kleinen Einmaleins (Einmaleinssätze mit 1,2,5,10 und die Quadratsätze) zur Lösung weiterer Aufgaben (z.B. 9·8→9·8=10·8-1·8→9·8=80-8=72)	M 1.2 Im Zahlenraum bis zur Million rechnen und Strukturen nutzen Die Schülerinnen und Schüler • wenden die Zahlensätze des kleinen Einmaleins sowie deren Umkehrungen (z.B. 42:7=6 oder 42:6=7 als Umkehrungen von 6·7=42) automatisiert und flexibel an.

1. Das Einmaleins in den Jahrgangsstufen 1/2

1.1. Operationsverständnis - Verknüpfung der Darstellungsebenen

Grundlage für die Arbeit an Sachsituationen ist, dass die Schülerinnen und Schüler über Grundvorstellungen zu diesen Operationen verfügen. Dabei müssen die verschiedenen Aspekte von Multiplikation und Division berücksichtigt werden.

Multiplikation

räumlich-simultan
Bsp: Beim Kniffeln würfelt Ben viermal die 6. Wie viele Punkt sind es?
Mama kauft zwei Tüten mit je 9 Muffins. Wie viele Muffins sind es?

zeitlich-sukzessiv
Bsp: Mama geht viermal in die Küche und holt jedes Mal zwei Eisbecher. Wie viele Eisbecher holt sie?
Olga trinkt täglich zwei Becher Milch. Wie viele Becher trinkt sie in einer Woche?

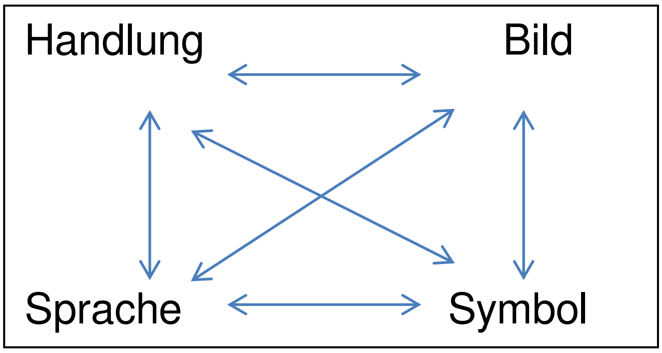
Division

aufteilen/ ausmessen
Bsp: Aus 30 Steckwürfeln baut Frederik Würfeltürme mit je 5 Würfeln. Wie viele Türme baut er?
Es sind 28 Karten. Wie viele Quartette sind es?

verteilen
Bsp: Ute verteilt 32 Spielkarten auf 4 Kinder. Wie viele Karten erhält jedes Kind?
Mama hat 32 Blumen gekauft. Sie verteilt sie auf 6 Vasen. Wie viele Blumen kommen in eine Vase?
Was geschieht mit dem Rest?

Da Mathematik einen Beitrag zur altersgemäßen Lebensbewältigung liefert (vgl. Fachprofil Mathematik), sollten stets Aufgaben mit Rest einbezogen werden, denn Situationen, in denen beim Auf- oder Verteilen ein Rest bleibt, sind realistischer.

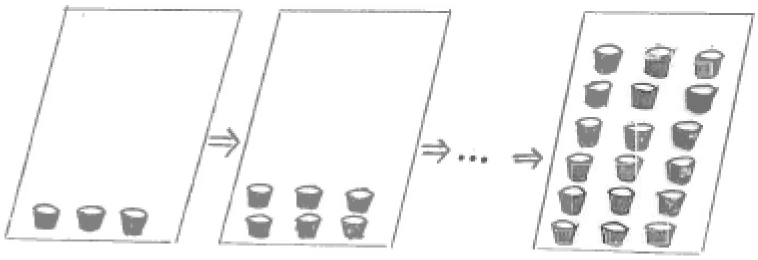
Damit das Kind diese Grundvorstellungen aufbaut, müssen im Unterricht die verschiedenen Darstellungsebenen verknüpft werden.



Möglichkeiten der Verknüpfung der Darstellungsebenen:

- Das Kind führt eine Handlung durch, versprachlicht diese und bildet den Term/ die Gleichung dazu.
- Das Kind erzählt eine Rechengeschichte zu einem Term.
- Das Kind versprachlicht die Handlung, die von ihm oder einem anderen Kind durchgeführt wird.
- Das Kind erzählt zu einem Bild eine Rechengeschichte und bildet den Term/die Gleichung dazu.

- Das Kind führt zu einem Term eine Handlung durch und zeichnet ein Bild dazu. Dabei ist zu beachten, dass der zeitlich-sukzessive Aspekt der Multiplikation nur als Bildfolge dargestellt werden kann, z. B.

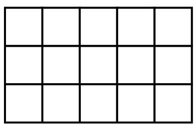


Diese Übungen sollen nicht nur im Rahmen der Sequenz zur Einführung der Multiplikation bzw. Division durchgeführt werden, sondern können immer wieder (auch in den Jahrgangsstufen 3/4) z. B. im Rahmen der „Kopfrechenphase" aufgegriffen werden.

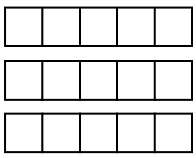
1.2. Tauschaufgaben – Kommutativgesetz der Multiplikation

Das Verständnis des Kommutativgesetzes der Multiplikation ist eng mit dem Inhaltsbereich „Muster und Strukturen" verwoben.

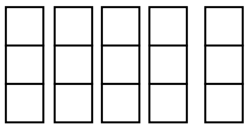
Folgendes Muster



kann räumlich unterschiedlich strukturiert werden.



in 3 Reihen mit je
5 Quadraten: $3 \cdot 5 = 15$.



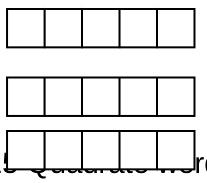
in 5 Spalten mit je
3 Quadraten: $5 \cdot 3 = 15$.

Das Ergebnis bleibt das Gleiche (ab = ba), unabhängig davon wie das Muster strukturiert wird.

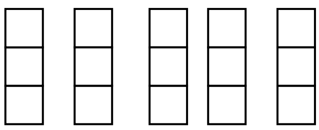
1.3. Umkehraufgaben

Ebenfalls entscheidend für den Aufbau von Grundvorstellungen ist das Verstehen des mathematischen Zusammenhangs zwischen Multiplikation und Division.

So kann das Bild. auch als Umkehroperation verstanden werden.



15 Quadrate werden in 5er
aufgeteilt. Es sind 3 Bündel.



15 Quadrate werden in 3er Bündel
aufgeteilt. Es sind 5 Bündel.

15 : 5 = 3 15 : 3 = 5

1.4. Strukturierung der Multiplikationsaufgaben

Ausgangspunkt der Erarbeitung der Kernaufgaben des Einmaleins ist die Einmaleinstabelle mit allen Zahlensätzen des kleinen Einmaleins. Die Schülerinnen und Schüler entdecken und erarbeiten mathematische Strukturen in der Tabelle, z. B. Zuordnung Aufgabe – Tauschaufgabe, Quadrataufgaben, Aufgaben mit gleichem Ergebnis, Nachbaraufgaben.

Dies bietet folgende Vorteile:

- Durch die Strukturierung erhalten auch leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler von Anfang an Einblick in mathematische Zusammenhänge. Auch sie erkennen und nutzen Strategien und die Anzahl der Aufgaben, die auswendig gelernt werden müssen, reduziert sich erheblich. Alleine die Anwendung des Kommutativgesetzes verringert die Anzahl der auswendig zu lernenden Aufgaben von 121 auf 66.
- Durch die entdeckende, handelnde und selbständige Auseinandersetzung mit dem mathematischen Inhalt erhält die Lehrkraft Einblick in die Vorkenntnisse und Lösungsstrategien der Kinder und damit wichtige Informationen für frühzeitiges Fordern und Fördern.
- Im Laufe des Lernprozesses (Erarbeitung und Automatisierung der Kernaufgaben; Nutzen der Kernaufgaben zur Erschließung weiterer Aufgaben) werden während Reflexionsphasen immer wieder mathematische Zusammenhänge vertieft. Dies ist auch Grundlage für die Selbsteinschätzung der Kinder und fördert somit selbstbestimmtes Lernen.

•	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1·1	1·2	1·3	1·4	1·5	1·6	1·7	1·8	1·9	1·10
2	2·1	2·2	2·3	2·4	2·5	2·6	2·7	2·8	2·9	2·10
3	3·1	3·2	3·3	3·4	3·5	3·6	3·7	3·8	3·9	3·10
4	4·1	4·2	4·3	4·4	4·5	4·6	4·7	4·8	4·9	4·10
5	5·1	5·2	5·3	5·4	5·5	5·6	5·7	5·8	5·9	5·10
6	6·1	6·2	6·3	6·4	6·5	6·6	6·7	6·8	6·9	6·10
7	7·1	7·2	7·3	7·4	7·5	7·6	7·7	7·8	7·9	7·10
8	8·1	8·2	8·3	8·4	8·5	8·6	8·7	8·8	8·9	8·10
9	9·1	9·2	9·3	9·4	9·5	9·6	9·7	9·8	9·9	9·10

10	10·1	10·2	10·3	10·4	10·5	10·6	10·7	10·8	10·9	10·10

1.5. Erarbeitung der Kernaufgaben des Einmaleins

Im Folgenden werden Möglichkeiten der Erarbeitung der Kernaufgaben vorgestellt.

- Einmaleinssatz mit 1
  Dabei bietet es sich an, die Tauschaufgabe dieser Einmaleinsreihe als Ausgangspunkt zu wählen (also 1·2,…). Die Kinder schieben z.B. einmal zwei, drei, vier,… Perlen auf dem Abakus..

- Einmaleinssatz mit 2
  Analog zum Einmaleinssatz mit 1 ist es auch beim Einmaleinssatz mit 2 leichter, zunächst die Tauschaufgabe zu erarbeiten. Die Verdoppelungen haben die Kinder in den Jahrgangsstufen 1/2 automatisiert, neu ist hier lediglich die Notation der Verdoppelung als Multiplikation.

- Einmaleinssatz mit 5
  Ihre Vorkenntnisse bezüglich der „Kraft der 5“ und der Struktur des Hunderterfeldes aus den Jahrgangsstufen 1/2 nützen die Kinder zur Erarbeitung des Einmaleinssatzes mit 5.

  1 · 5 = 5 ●●●●● ●●●●● 2 · 5 = 10
  3 · 5 = 15 ●●●●● ●●●●● 4 · 5 = 20
  5 · 5 = 25 ●●●●● ●●●●● 6 · 5 = 30
  7 · 5 = 35 ●●●●● ●●●●● 8 · 5 = 40
  9 · 5 = 45 ●●●●● ●●●●● 10 · 5 = 50

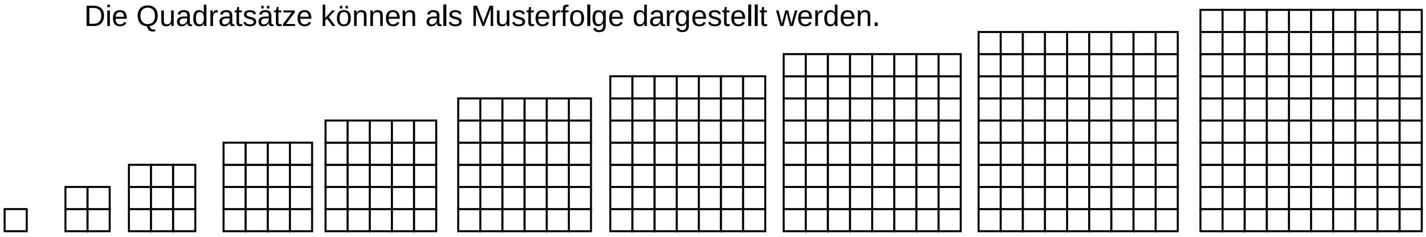
- Einmaleinssatz mit 10
  Auch hier nutzen die Kinder ihre Vorkenntnisse bezüglich des Stellenwertsystems bzw. der Struktur des Arbeitsmittels.

  ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● 1 · 10 = 10
  ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● 2 · 10 = 20
  ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● 3 · 10 = 30
  ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● 4 · 10 = 40
  ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● 5 · 10 = 50
  ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● 6 · 10 = 60
  ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● 7 · 10 = 70
  ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● 8 · 10 = 80
  ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● 9 · 10 = 90
  ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● 10 · 10 = 100

  Der mathematische Zusammenhang zwischen den Einmaleinsreihen mit 5 und 10 (das Doppelte bzw. die Hälfte) wird so deutlich.

- Die Quadratsätze

Die Quadratsätze können als Musterfolge dargestellt werden.



1 4 9 16 25 36 49 64 81 100

+3 +5 +7 +9 +11 +13 +15 +17 +19

Die Schülerinnen und Schüler entdecken, dass in der geometrischen Folge je eine Reihe und Spalte hinzukommen und sich in der dazugehörigen arithmetischen Folge der Unterschied zwischen den Anzahlen der Quadrate um jeweils zwei erhöht.

- Das Einmaleins mit 0

  Die Multiplikation mit 0 ergibt immer 0 und stellt für die Kinder in der Regel kein Problem dar. Problematisch dagegen ist die Division durch 0. Wenn die Null durch eine beliebige Zahl außer 0 geteilt wird, ergibt dies immer 0 → 0: a= 0. Teilt man eine Zahl durch 0 so ist das Ergebnis jedoch nicht definiert, es ergibt keine Lösung.

Mit den erarbeiteten Strategien können insbesondere leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler die Einmaleinssätze der Kernaufgaben weiterführen, z.B.

Verdoppelungen	Quadratsätze
$2 \cdot 11 = 22$	$11 \cdot 11 = 121$
$2 \cdot 12 = 24$	$12 \cdot 12 = 144$
…	…

1.6. Automatisierung der Kernaufgaben

Die Kernaufgaben werden in vielfältigen Übungen automatisiert (vgl. dazu auch Fachprofil Mathematik „Kompetenzerwerb bezieht die sichere Anwendung grundlegender mathematischer Fertigkeiten (…) mit ein.

Beispiele für Übungsformate:

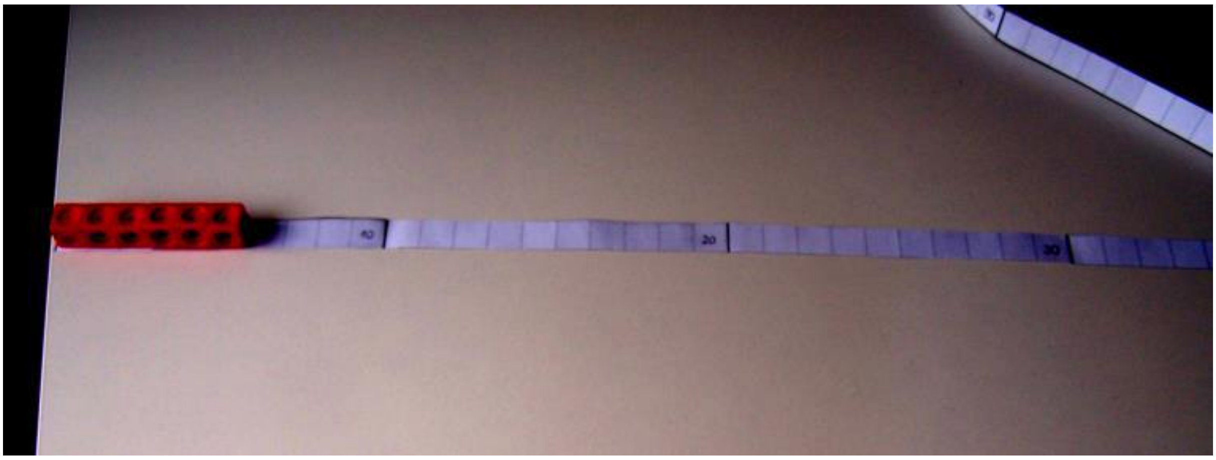
- Einmaleinskartei : Die Schülerinnen und Schüler schreiben Einmaleinskärtchen (auf einer Seite die Malaufgabe, auf der anderen Seite das Ergebnis). Sie sortieren die Aufgaben nach Aufgaben die sie bereits auswendig wissen und Aufgaben, die sie noch üben müssen.
- Rechentabellen
- Mal-Plus-Häuser

1.7. Automatisierung der Umkehrungen

Die Verwendung von Arbeitsmitteln als Lösungshilfe ist bei der Division schwieriger als bei der Multiplikation.

Weiß das Kind beispielsweise das Ergebnis der Aufgabe 49: 7 nicht, so gibt es verschiedene Möglichkeiten dieses zu ermitteln:

- Es kann die Aufgabe arithmetisch über die fortlaufende Subtraktion 49-7-7-7-7-7-7-7-7= 0 lösen. Das Ergebnis ist 7, da man von 49 7mal 7 abziehen kann. Die Gefahr des sich Verzählens oder Verrechnens ist jedoch groß (insbesondere bei leistungsschwachen Schülerinnen und Schülern).
  Das Ergebnis kann auch über die fortlaufende Addition gelöst werden 7+7+7+7+7+7+7= 49. Die Zahl 7 passt 7mal in die Zahl 49.
- Es legt 49 Plättchen oder schiebt 49 auf dem Abakus, teilt diese in Siebenerpäckchen auf und erhält so 7Packungen. Diese Methode ist sehr zeitaufwändig und verleitet zum zählenden Rechnen. Zudem ist der Umbruch am Zehner nicht unproblematisch.
- Es verwendet den aus der Hundertertafel gebastelten Zahlenstrahl und probiert, wie oft der Siebenerstab (bestehend aus 7 Steckwürfeln) in die 49 passt (Division durch Hineinmessen von Längen). Auch hier besteht die Gefahr jedoch die Gefahr des zählenden Rechnens.



- Haben die Kinder den Zusammenhang zwischen den Operationen Multiplikation und Division verstanden, so können Divisionsergebnisse über die Multiplikationsaufgabe erschlossen werden.
  Ein Bild – 4 Aufgaben: 2, 9, 18 (vgl. Tausch- und Umkehraufgaben)
  2 · 9 = 18 9 · 2= 18   18 : 2 = 9 und 18 : 9 = 2

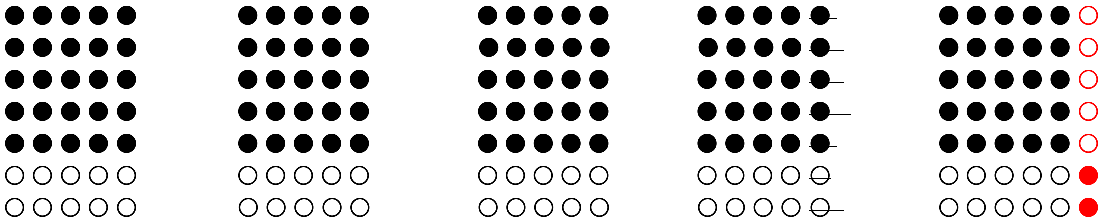
1.8. Nutzung der Kernaufgaben zur Lösung weiterer Aufgaben

Die Ergebnisse der in der Einmaleinstabelle blau markierten Aufgaben erschließen sich die Kinder in Jahrgangsstufe 1/2 anhand von Arbeitsmitteln über die Kernaufgaben durch die Strategien des Zusammensetzens und Zerlegens bzw. der Nachbaraufgaben
Die blau markierten Aufgaben müssen in den Jahrgangsstufen 1/2 nicht automatisiert werden.

Diese Strategien werden anhand von Arbeitsmitteln erarbeitet und veranschaulicht.

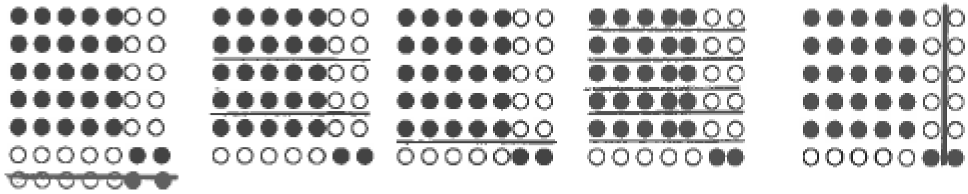
- Nachbaraufgaben

	6 · 5 = 35 – 5 = 30	
7 · 4 = 35 – 7 = 28	7 · 5 = 35	7· 6 = 35 + 7 = 42
	8 · 5 = 40 35 + 5 = 40	



$6 \cdot 5 = 30$ $8 \cdot 5 = 40$ $7 \cdot 5 = 35$ $7 \cdot 4 = 28$ $7 \cdot 6 = 42$

- Kernaufgaben additiv zusammensetzen bzw. Multiplikationsaufgaben in Kernaufgaben zerlegen



$6 \cdot 7 = 7 \cdot 7 - 1 \cdot 7 = 42$

$6 \cdot 7 = 2 \cdot 7 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 7 = 14 + 14 + 14 = 42$

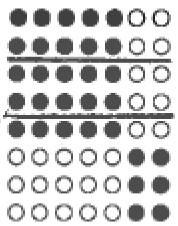
$6 \cdot 7 = 5 \cdot 7 + 1 \cdot 7 = 35 + 7 = 42$

$6 \cdot 7 = 1 \cdot 7 + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 7 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 42$

$6 \cdot 7 = 6 \cdot 6 + 1 \cdot 6$

Die Schülerinnen und Schüler bewerten die unterschiedlichen Zerlegungen und Zusammensetzungen.

- Verdoppelung der Kernaufgaben
  Auch durch das Verdoppeln der Kernaufgaben können Multiplikationsaufgaben erschlossen werden.
  Die Schülerinnen und Schüler veranschaulichen die Verdoppelungen am Arbeitsmittel und finden Ergebnisse zu folgenden Aufgaben:



$2 \cdot 7$
$4 \cdot 7$
$8 \cdot 7$

analog dazu

$2 \cdot 3$	$3 \cdot 3$	$4 \cdot 4$	$2 \cdot 8$
$4 \cdot 3$	$6 \cdot 3$	$8 \cdot 4$	$4 \cdot 8$
$8 \cdot 3$			$8 \cdot 8$

2. Einmaleins in den Jahrgangsstufen 3/4

In den Jahrgangsstufen 3/4 werden die Multiplikations- und Divisionsaufgaben, die in den Jahrgangsstufen 1/2 mit Hilfe der Kernaufgaben gelöst wurden, automatisiert.

Mögliche Übungen:

- Entdecken mathematischer Zusammenhänge der Einmaleinsreihen

·3	·6	·9
3	6	9
6	12	18
9	18	27
12	24	36
15	30	45
18	36	54
21	42	63
24	48	72
27	54	81
30	60	90

·2	·4	·8
2	4	8
4	8	16
6	12	24
8	16	32
10	20	40
12	24	48
14	28	56
16	32	64
18	36	72
20	40	80

Alternativ dazu können die Ergebnisse der Einmaleinsreihen an der Hundertertafel markiert werden.

Mögliche Äußerungen der Schülerinnen und Schüler:

- Wenn man die Ergebnisse der 3 er Reihe verdoppelt erhält man die Ergebnisse der 6er Reihe, wenn man sie verdreifacht erhält man die Ergebnisse der 9er Reihe.

- Addiert man die Ergebnissen der 3er und der 6er Reihe waagrecht, so erhält man die Ergebnisse der 9 er Reihe.

- Addiert man die Ergebnisse der 2 er und 4 er Reihe waagrecht, so erhält man die Ergebnisse der 6 er Reihe.

- Wenn man die Ergebnisse der 4 er Reihe verdoppelt, erhält man die Ergebnisse der 8er Reihe, wenn man die der 2 er Reihe verdoppelt erhält man die 4er Reihe.

- Verwandte Aufgaben suchen

Tauschaufgabe 7·6 =42

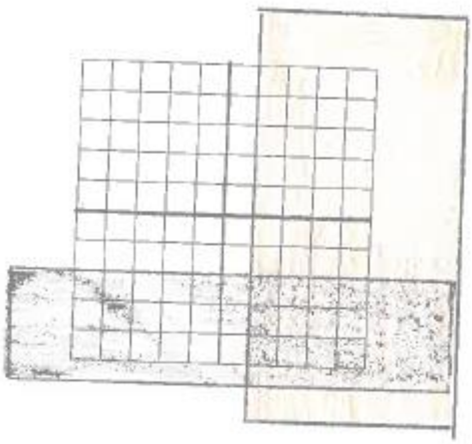
6·7

Nachbaraufgaben
5·7=35;7·7=49;6·6=36; 6·8=48

Umkehraufgaben Hälfte
42:6=7;42:7=6 $3 \cdot 7=21$

- Nähe des Einmaleins mit 10 als Einprägestrategie für das Einmaleins mit 9 nutzen
  $x \cdot 9 = x \cdot 10 – x$

- Malaufgaben an der Hundertertafel



6 ●7 = 42

- Umkehraufgaben mit Hilfe der Einmaleinstabelle automatisieren
  Divisionsaufgaben zu den Zahlen bilden

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	4	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100