KIRA - Kinder Rechnen Anders

# Gewinnwahrscheinlichkeiten - Einschätzungen von Kindern des vierten Schuljahres

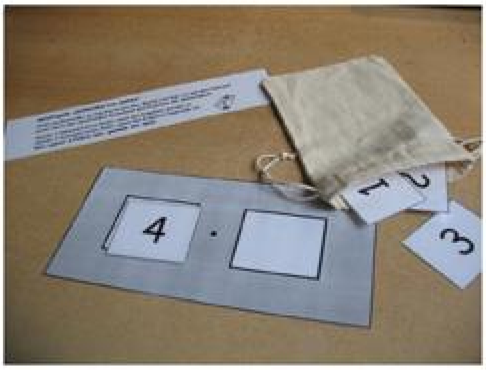
*Wahrscheinlichkeiten sind auch in der Grundschule ein Thema. Am Ende der vierten Klasse sollen die Kinder Grundbegriffe wie* ***sicher****,* ***unmöglich*** *und* ***wahrscheinlich*** *kennen und Gewinnchancen bei einfachen Zufallsexperimenten einschätzen können (vgl. Hunscheidt, Noffke & Tjardes 2008). Um dies zu gewährleisten, ist es wichtig, Kindern die Möglichkeit zu geben, Erfahrungen zu diesem Thema zu machen. Dazu bieten sich beispielsweise einfache Glücksspiele an. Im Rahmen ihrer Masterarbeit hat sich Annabell Ocken (2012) damit beschäftigt, wie Kinder Gewinnwahrscheinlichkeiten bei Glückspielen beurteilen. Dazu wurden Interviews mit zehn Kindern durchgeführt. Auf dieser Seite steht im Fokus, was Kinder über den Zusammenhang zwischen theoretischer Gewinnwahrscheinlichkeit und tatsächlichen Spielausgängen denken.*



## 1. „Kommt drauf an, wie das Glück entscheidet."

Kindern des vierten Schuljahres wurde das folgende Glücksspiel vorgelegt. Die Kinder sollte beurteilen, ob die Regeln fair sind.

## „Ziffernkarten ziehen“



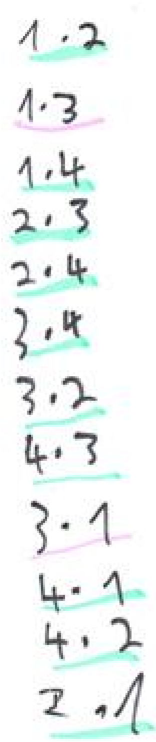
**Spiel für 2 Personen**

**Material:**
Kärtchen mit den Ziffern 1 bis 4
Beutel
Goldmünzen
Spielfeld

**Spielregeln:**
Die Spieler ziehen nacheinander je eine Karte aus dem Beutel.
Diese Karten werden auf dem Spielfeld platziert.
Das Ergebnis der Malaufgabe wird errechnet.
Ist das Ergebnis gerade bekommt Spieler 1 eine Goldmünze, ist es ungerade bekommt Spieler 2 eine.
Gewonnen hat, wer als erstes fünf Goldmünzen hat.

Betrachten Sie die unten aufgeführte Einschätzung der Spielregeln von Christine und Rebecca. Wie beurteilen Sie Christines und Rebeccas Argumentation?

Christine und Rebecca bemerken beim Spielen, dass während des ganzen Spiels nur ein ungerades Ergebnis aufgetreten war. Nach Aufforderung der Interviewerin beginnen sie alle möglichen Aufgaben aufzuschreiben. Sie gehen systematisch nach Tachometerprinzip vor, lassen jedoch die Tauschaufgaben aus und ergänzen sie nachträglich. Danach markieren sie ungerade Ergebnisse (vgl. Abbildung am rechten Rand).




*I: Habt ihr was herausgefunden?*
C: Es gibt mehr gerade Zahlen als ungerade.
R: Genau.
*I: Und was heißt das dann? Ist das gut oder schlecht?*
R: Das ist für den, der die ungeraden hat, schlecht und für den, der die geraden hat, gut. (grinst)
*I: Ist das denn fair?*
R: Mhm nein.
C: Nein, aber wenn man wechselt, dann ja. Also zuerst der eine gerade, also 5 Runden oder, also dass einer mal gerade hat und der andere auch mal gerade und der andere ungerade auch und der andere auch mal ungerade.
*I: Ok, also abwechselnd wär's ok. Und wenn man immer festhält?*
Beide: Dann wär's unfair.
*I: Was meint ihr denn was passiert, wenn man das ganz oft spielt?*
R: Dann würde immer nur einer gewinnen.
C: Und dann wird's irgendwann auch langweilig.
*I: Kann das da denn trotzdem passieren, dass da der gewinnt, der die ungeraden Zahlen hat?*
R: Ja, kann passieren. Weil wenn man immer 3 mal 1 macht oder 1 mal 3, dann gewinnt

man ja.
*I: Passiert das denn oft?*
R: Eher selten.
C: Kommt drauf an, wie das Glück entscheidet.

**2. Gewinnwahrscheinlichkeiten im Spiel ‚Ziffernkarten ziehen'**

Die Gewinnchancen bei Glücksspielen hängen von den Gewinnregeln und den Wahrscheinlichkeiten für die Einzelergebnisse ab. Wahrscheinlichkeiten geben an, mit welchem Grad an Wahrscheinlichkeit ein zufälliges Ergebnis eintreffen wird. Allgemein lässt sich die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses wie folgt berechnen:

$$\begin{array}{c}\text{Wahrscheinlichkeit}\\ \text{eines Ereignisses E}\end{array} = \frac{\text{Anzahl der für E günstigen Versuchsausgänge}}{\text{Anzahl aller möglichen Versuchsausgänge}}$$

Dabei erhält man Werte zwischen 0 und 1. Der Wert 1 besagt, dass ein Ereignis auf jeden Fall, also **sicher**, eintreten wird. Der Wert 0 zeigt an, dass ein Ereignis niemals eintreten kann, also **unmöglich** ist. Ereignisse, die so einen Wert zwischen 0 und 1 zugewiesen bekommen, gelten als **wahrscheinlich**, wobei hier durch die Nähe zu einer der beiden Randzahlen eine Tendenz in Richtung sicher oder unmöglich angezeigt wird. Für die Grundschule sollte man sich auf die Verwendung der Begriffe *sicher*, *wahrscheinlich*, *unwahrscheinlich* und *unmöglich* beschränken und auf die Arbeit mit Zahlenwerten verzichten (vgl. Hahn, Kahnt & Maurer 2009, S.9-12).

Um zu ermitteln, welcher Spieler im eingangs vorgestellten Spiel „Ziffernkarten ziehen" die besseren Gewinnchancen hat, ermittelt man zunächst die Anzahl aller möglichen Ziffernkartenkombinationen, die gezogen werden können. Es handelt sich hierbei um eine kombinatorische Aufgabe des Typs Variation ohne Wiederholung. Beim Ziehen der ersten Ziffer gibt es 4 Möglichkeiten. Beim Ziehen der zweiten Ziffer verbleiben dann nur noch je drei Möglichkeiten, an eine der vier Möglichkeiten für den ersten Faktor anzuschließen, da eine Karte bereits beim ersten Zug gezogen wurde. Man hat also $4 \cdot 3 = 12$ mögliche Versuchsausgänge.

Nun ermittelt man die für einen Spieler günstigen Ergebnisse. Bei den für Spieler A günstigen Ergebnissen müssen beide Ziffern ungerade sein, sonst wäre das Produkt der Ziffern gerade. Um den ersten Faktor zu besetzen, hat man zwei Möglichkeiten (die Karten mit den Ziffern 1 und 3). Die Ziffer für den zweiten Faktor ist dann die noch Verbleibende. Das heißt für Spieler A gibt es zwei günstige Versuchsausgänge ($3 \cdot 1$ und $1 \cdot 3$). Die anderen zehn Ausgänge sind günstig für Spieler B. Somit hat Spieler A eine Gewinnwahrscheinlichkeit von 2/12, also 1/6, während Spieler B eine von 10/12 = 5/6, also eine fünfmal so große wie Spieler A hat.

Natürlich gibt es noch etliche weitere Wege, um diese Anzahlen zu bestimmen. So kann man auch alle Möglichkeiten durch systematisches Aufschreiben finden. Darauf soll hier jedoch nicht näher eingegangen werden. Im **Interviewleitfaden** findet sich eine Beschreibung vieler weiterer möglicher Vorgehensweisen.

**3. Einschätzungen der Kinder aus der Studie**

Alle Kinder, die in der Studie befragt wurden, fanden heraus, dass es viel mehr Aufgaben gibt, die günstig für

Spieler A sind, als solche, die günstig für Spieler B sind. Dies geschah meist über das mehr oder weniger systematische Aufschreiben aller Aufgaben, die gezogen werden können. Oft begründeten die Kinder dies aber auch argumentativ.

Am Beispiel anderer kombinatorischer Fragestellungen („Fußball- und Lottoaufgabe") werden auf der Seite **‚Prozessbezogene Kompetenzen: Kombinatorik‘** typische Vorgehensweisen von Kindern beim Lösen kombinatorischer Aufgaben dargestellt.

Weiter stellten alle Kinder einen Zusammenhang zu den Spielausgängen her. Auch bei Christine und Rebecca aus dem Eingangsbeispiel war dies der Fall. Durch systematisches Aufschreiben aller möglichen Aufgaben haben sie erkannt, dass einer der beiden Spieler mehr günstige Versuchsausgänge hat als der andere. Sie wissen, dass dies die Wahrscheinlichkeit für das Gewinnen beeinflusst, auch wenn sie die Begriffe **Wahrscheinlichkeit** oder **wahrscheinlicher** nicht benutzen. Dass sie dies aber dennoch erkannt haben, wird aus der Äußerung „Dann würde immer nur einer gewinnen" ersichtlich. Die beiden Mädchen gehen davon aus, dass bei mehrmaligem Spielen der Spieler, mit den geraden Ergebnissen, auch immer gewinnen würde. Dabei vergessen sie, dass dieser Spieler nicht gar keine Möglichkeit zu gewinnen hat, sondern ebenfalls eine, wodurch er ebenfalls die Möglichkeit hat, zu gewinnen. Im Eifer des Gesprächs kann dies aber auch aus Flüchtigkeit geschehen sein, denn in der Alltagssprache werden die Begriffe **immer**, **wahrscheinlich** und **unmöglich** oft nicht nach streng mathematischer Definition verwendet (vgl. Eichler 2010, S. 8). Im weiteren Interview wird letztlich deutlich, dass die beiden sich nur ungünstig ausgedrückt haben. Sie erläutern, dass natürlich auch Ergebnisse kommen könnten, die günstig für Spieler B sind, auch wenn dies eher selten vorkommen würde.

Die anderen interviewten Kinder argumentierten ähnlich wie Christine und Rebecca. Alle Kinder erkannten, dass das Spiel nicht fair ist und dass dies mit der ungleichen Verteilung von Gewinnaufgaben zusammenhängt. Es wurde aber auch deutlich, dass es für die Kinder gar nicht so leicht ist, zu sagen, was dann beim Spielen tatsächlich passiert. Viele Kinder stocken bei dem Wort „immer", was darauf hin deutet, dass sie sich nicht so sicher sind, ob dies tatsächlich immer so ist. Dieser Sachverhalt soll nun näher betrachtet werden.

### 4. Gewinnwahrscheinlichkeiten und tatsächliche Versuchsausgänge

Der eben beschriebene Gesichtspunkt ist ein wesentlicher Aspekt der Wahrscheinlichkeitstheorie. Die Angabe einer Wahrscheinlichkeit kann nicht das Eintreten eines Ereignisses vorhersagen. So ist beispielsweise bei viermaligem Ziehen aus vier Ziffernkarten mit den Ziffern 1 bis 4 nicht sicher, dass eine bestimmte dieser Ziffern auch wirklich einmal dabei ist. Die Wahrscheinlichkeit gibt einzig Auskunft darüber, wie groß die Chance ist, dass das gewünschte Ergebnis eintrifft (vgl. Hahn, Kahnt & Maurer 2009, S.10). Auch bei Glückspielen, wie dem oben beschriebenen, muss die tatsächliche Gewinnverteilung der Spieler nicht der theoretisch berechneten Wahrscheinlichkeit entsprechen. So kann es also auch passieren, dass Spieler 2 trotz sehr viel geringerer Gewinnwahrscheinlichkeit mehrfach gewinnt. Gerade die Erklärung solcher Phänomene bereitet Kindern häufig Schwierigkeiten, wie gerade am Beispiel von Christine und Rebecca angedeutet wurde.

Dass die Interpretation von tatsächlichen Spielausgängen (vor allem solcher, die von den Erwartungen abweichen) für viele Kinder so schwierig ist, wird unter anderem dadurch hervorgerufen, dass häufig **Fehlvorstellungen** zum Thema Zufall und Wahrscheinlichkeiten vorherrschen. So ist es denkbar, dass verborgene Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Versuchen angenommen werden

(Kompensationsargument), also dass ein vorheriges Ereignis beeinflusst, welches Ereignis im Versuch danach wahrscheinlich ist. Ebenso kann die Vorstellung existieren, der Zufall würde „unregelmäßige" Ereignisse produzieren (beispielsweise beim Lotto: 1-2-3-4-5-6 ist unwahrscheinlicher als 2-6-12-15-26-39). Auch wird oft *geringe Wahrscheinlichkeit* mit *Unmöglichkeit*, sowie *hohe Wahrscheinlichkeit* mit *Sicherheit* verwechselt. Ebenso denkbar sind Vorstellungen, dass bestimmte Glück bringende Handlungen, wie Augenschließen o.ä., den Versuchsausgang beeinflussen können (vgl. Eichler 2010, S. 8).

Solche Fehlvorstellungen resultieren häufig aus Heuristiken, anhand derer Menschen sich Meinungen über Wahrscheinlichkeiten bilden. Auf der KIRA-Seite **‚Umgang mit Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten‘** werden diese dargestellt.

Anhand verschiedener Äußerungen von Kindern, bei denen es um die Beziehung zwischen erwarteten und tatsächlichen Spielausgängen geht, soll nun veranschaulicht werden, wie sich Fehlvorstellungen äußern können. Die Äußerungen entstanden in Situationen, in denen die tatsächliche Gewinnverteilung nicht der auf Grund der Wahrscheinlichkeit erwarteten entsprach oder die Kinder provokant gefragt wurden, ob auch etwas anderes passieren könne, als sie erwarten. Bitte beachten Sie, dass teilweise nicht mehr die originale Gewinnregel, sondern eine von den Kindern modifizierte, Grundlage der Überlegungen war.

- Betrachten Sie die nachfolgenden Transkripte. Wie erklären sich die Kinder die unerwarteten Spielausgänge bzw. halten sie solche für möglich? Welche Fehlvorstellungen könnten die Kinder ggf. entwickelt haben?
- Wie könnte man solche Situationen nutzen, wenn sie im Unterricht auftreten?

| | |
|---|---|
| **Fabien** (normale Gewinnregel)<br>*I: Und meinst du, dass du dann auch seltener gewinnst als ich? Wir haben ja beide grade zweimal gewonnen.*<br>F: Also eigentlich müsste das ja so sein! Ist zwar komisch, aber es müsste eigentlich so sein, weil es gibt je viel mehr Aufgaben. | **Max** (normale Gewinnregel)<br>*I: Kann es denn trotzdem passieren, dass derjenige, der die ungeraden Zahlen hat gewinnt?*<br>M: Das wird sehr selten vorkommen, weil es da ja nur zwei gibt. Aber sonst, das könnte gehen, aber dafür braucht man sehr viel Glück. |
| **Sebastian** (modifizierter Kartensatz: 5dazu, 4 weg, normale Gewinnregel)<br>*I: Wie kommt denn das, dass du jetzt zweimal gewonnen hast, obwohl das gerecht ist?*<br>S: Weiß ich nicht. ... Weil hier ist von jeder Zahl was drin und hier ist von der 2 gar keine drin. | **Karolin** (modifizierte Gewinnregel: Spieler 1 gewinnt bei 1, 2, 3 und 4, Spieler 2 bei Zahlen ab 5)<br>*I: Du hast vorhin gesagt, das ist trotzdem ungerecht.*<br>K: Ja, weil immer dieselbe Kombination gekommen ist und das ja eigentlich relativ unwahrscheinlich ist. |
| **Karolin 2** (modifizierte Gewinnregel: Spieler 1 gewinnt bei 1, 2, 3 und 4, Spieler 2 bei Zahlen ab 5)<br>K: Bis 4 wären 2, 3 und 4, genau und über 4 wären 6 8 und 12. Beides 3, das ist gerecht.<br>*I: Also müssen es immer gleich viele Möglichkeiten sein, damit das gerecht ist?*<br>K: Ja, das hängt natürlich mit Glück zusammen. Es | **Jonas** (modifizierter Kartensatz: 5 dazu, 2 weg, normale Gewinnregel)<br>*I: Du hast doch grade gesagt, das ist fair. Wieso hast du denn jetzt 5 mal gewonnen und der Oliver gar nicht?*<br>J: Naja, weil die 3 und die 1 ziemlich oft vorkamen.<br>*I: Und wieso kann das einfach so passieren? Ich* |

| | |
|---|---|
| kann natürlich auch sein, dass jemand die ganze Zeit nacheinander... irgendwie, dass der die ganze Zeit nacheinander 2 und 1, 1 und 3, und 4 und 1 gezogen wird. Dann hat natürlich der eine gewonnen. Aber eigentlich, es könnte gerecht sein, weil beide haben gleich gute Chancen. | *dachte, das wär gerecht.*<br>J: Ja, das müsste man irgendwie besser mischen, glaub ich. |
| **Lisa und Karolin** (normale Gewinnregel)<br>K: Das ist ziemlich ungerecht.<br>*I: Warum?*<br>K: Fünf gerade und eine ungerade.<br>*I: Und was bedeutet das, wenn man das spielt?*<br>K: Das bedeutet, die geraden gewinnen immer.<br>R: Ja, weil ähm, also hier sind ja also, dann kriegt der, der ungerade nimmt, kriegt ja immer nur einen Punkt.<br>K: Der hat nur eine Kombination.<br>R: ... und dabei gibt's dann irgendwie fünf Punkte.<br>K: Da kannst du fünf Punkte dafür bekommen, wenn du Glück hast.<br>*I: Kann das denn trotzdem sein, dass der, der die ungeraden Zahlen hat, gewinnt?*<br>K: Ja natürlich, aber das ist schon ziemlich unwahrscheinlich, weil dann müsste es...<br>R Immer die gleiche Zahl sein.<br>K: ... immer die gleiche Kombination sein.<br>*I: Was heißt den unwahrscheinlich?*<br>K: Dass häufiger ähm andere Kombinationen kommen.<br>*I: Also unwahrscheinlich bedeutet...?*<br>K: ... das diese Kombination nicht oft zutrifft. | **Lisa und Karolin 2** (modifizierter Kartensatz: 5 dazu, 4 weg, normale Gewinnregel)<br>K: Jetzt hab ich gewonnen, aber das war nur Glück.<br>*I: Nur Glück?*<br>R: Ja, weil es kommen nicht immer alle Zusammensetzungen von Zahlen, weil...<br>K: Es ist ja nicht garantiert, dass da jetzt immer nur alle diese Zusammensetzungen kommen. Es kann ja auch sein, dass immer das Gleiche kommt.<br>*I: Also wenn ich zwölfmal ziehe, dann bekomme ich nicht alle diese Aufgaben?*<br>R: Ne, nicht immer sicher, weil es kann ja auch sein, dass die Aufgaben doppelt sind.<br>K: Es klappt nicht, also es ist halt nie so richtig gleich. Es ist halt reines Glück. Es ist nur jetzt gerecht und vorher nicht. |

**Hier** finden Sie eine exemplarische Analyse.

**5. Zusammenfassung**

Die zahlreichen Kinderäußerungen zeigen, dass Kinder gut dazu in der Lage sind sich mit dem Thema Wahrscheinlichkeiten zu beschäftigen und dazu viele kluge Gedanken äußern. Gerade der Anlass eines Glücksspiels eignet sich gut, um Kinder dazu zu bringen, über Wahrscheinlichkeiten nachzudenken. Sie sind dabei intrinsisch, also aus der Sache heraus, motiviert (vgl. Eichler 2010, S. 8) und haben Spaß. In den Interviews wurde dies am Ende oftmals von den Kindern bekundet, ohne dass sie danach gefragt wurden.

Dennoch zeigen die Äußerungen auch auf, dass vielfach noch Fehlvorstellungen vorherrschen. Ebenso hat sich hier gezeigt, dass die Kinder sehr unterschiedlich über Wahrscheinlichkeit denken. Manchmal denken sie zu verschieden Zeitpunkten sogar selbst anders als kurz zuvor. Es ist also sehr wichtig aufmerksam zu beobachten und zu analysieren, welche Denkweise sich hinter Äußerungen von Kindern verbirgt, da viele Aussagen nur latent mitschwingen und schnell unerkannt bleiben. Nur so ist es möglich Fehlvorstellungen zu erkennen und adäquat auf sie zu reagieren. Dies ist wichtig, da die Aneignung stochastischer Vorstellungen erschwert werden kann, wenn Fehlvorstellungen unhinterfragt und unreflektiert bleiben (vgl. Prediger 2005).

Abschließend soll hier noch gesagt werden, dass durchaus noch andere Sichtweisen und Begründungen auftreten können. Die dargestellten Interviewauszüge sollten lediglich als Beispiele dienen. Es kann auf Grundlage der zehn Interviews kein Anspruch auf Vollständigkeit bzgl. der verschiedenen Denkwege der Kinder bedient werden.

Auf der Website unseres Partnerprojekts PIK AS finden Sie in **Haus 7** ‚Gute Aufgaben' im Bereich Unterrichtsmaterial eine Unterrichtseinheit zum Thema "Ziffernkarten ziehen", die auf der Behandlung von Glückspielen basiert.

**6. Material**

**Spielregeln des Spiels „Ziffernkarten ziehen"**
**Spielfeld**
**Ziffernkarten**
**Interviewleitfaden**

**7. Verwandte Themen**

**Häufigkeit & Wahrscheinlichkeit**
**Kombinatorik**
**Prozessbezogene Kompetenzen**
**Urnenmodell**

**8. Literatur**

Eichler, K.-P. (2010): Wahrscheinlich kein Zufall - Betrachtungen rund um Wahrscheinlichkeit und Häufigkeit. In: Praxis Grundschule. 33. Jg., H. 3, S. 7-13.

Hunscheidt, Noffke & Tjardes (2008): Jens und Lisa auf dem Rummel. Gestaltung eines Forscherheftes zum Thema „Zufall und Wahrscheinlichkeit". In: Grundschulunterricht Mathematik. 55. Jg., H. 2. S.33-46.

Hahn, H., Kahnt, J. & Maurer, F. (2009): Wahrscheinlich ist „... es kann klappen, muss aber nicht..." - Erfahrungen mit Wahrscheinlichkeitsaufgaben in der Grundschule. In: Sache-Wort-Zahl. 37. Jg., H.102, S. 9-16.

Ministerium für Schule und Weiterbildung NRW (2008): Lehrplan Mathematik für die Grundschulen des Landes NRW. Frechen: Ritterbach. Verfügbar unter: http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de /lehrplaene/upload/lehrplaene_download/grundschule/grs_faecher.pdf

Ocken, Annabell (2012): Entwicklung und Erprobung von Lernmaterialien für Studierende zum Thema ‚Gewinnwahrscheinlichkeiten' am Beispiel des Glücksspiels ‚Ziffernkarten ziehen'. Unveröffentlichte Masterarbeit. TU Dortmund.

Prediger, S (2005): Wenn man Schwein gehabt hat, kann man zwei Dreien kriegen. Fallbeispiele zu Überschneidungseffekten bei stochastischen Vorstellungen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2005 online. http.:ww.mathematik.uni-dortmund.de/didaktik/BzMU/BzMU2005/Beiträge/prediger-gdm05.pdf

Schwarzkopf, R. (2004): Wer gewinnt? - Dem Zufall auf der Spur. In: Die Grundschulzeitschrift. 18. Jg., H. 172, S. 32-36.