

Die allgemeine mathematische Kompetenz

Argumentieren

im LehrplanPLUS

Wie alle allgemeinen mathematischen Kompetenzen wird auch die Kompetenz „Argumentieren“ in aktiver Auseinandersetzung mit Fachinhalten erworben. Dabei lässt sich die Kompetenz „Argumentieren“ nicht völlig stringent nach Grundsätzen wie „immer abstrakter und mathematisch strenger werdend“ aufbauen: Während bereits in Jgst. 5 manche Argumentationen mathematisch streng geführt werden können (z. B.: Widerlegen durch ein Gegenbeispiel), müssen noch in der Oberstufe manche Begründungen auf der Ebene anschaulicher Überlegungen oder des Plausibilisierens bleiben (z. B.: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Ableitung der Sinusfunktion). Auch ein Grundsatz wie „zunächst einschrittig, dann mehrschrittig“ erweist sich als nicht tragfähig, da z. B. bereits in Jgst. 6 der mehrschrittige Nachweis, dass sich ein vorgegebener Bruch als endlicher Dezimalbruch darstellen lässt, von den Schülerinnen und Schülern problemlos geführt werden kann. Das Einfordern von Begründungen in immer wieder neuen inhaltlichen Zusammenhängen und das Ermuntern zum Hinterfragen von Zusammenhängen sorgen im Sinne einer argumentativen Unterrichtskultur aber dafür, dass die Schülerinnen und Schüler sicher im Umgang mit verschiedenen Begründungsmustern werden und diese im Laufe der Zeit immer flexibler und verständiger nachvollziehen und einsetzen können.

Der LehrplanPLUS unterstützt den Aufbau der allgemeinen mathematischen Kompetenz „Argumentieren“ auf zwei Arten:

- ◆ In nahezu jedem Lernbereich gibt es eine oder mehrere Kompetenzerwartungen, in der bzw. denen deutlich zum Ausdruck kommt, dass die Schülerinnen und Schüler Argumentationen nachvollziehen, wiedergeben oder auch selbständig erstellen sollen. Bei den Formulierungen ist mit Blick auf das Abstraktionsvermögen der Schülerinnen und Schüler und die Komplexität der mathematischen Inhalte die jeweils erwartete Tiefe der Argumentation abgebildet (bewusste Verwendung von Operatoren, insbesondere „plausibel machen“, „erklären“, „begründen“ und „beweisen“).

Beispiele aus dem Fachlehrplan:

M11 3.1, 1. KE¹:

*... **machen** die Ableitungsfunktion der Sinusfunktion und die der Kosinusfunktion anhand graphischer Überlegungen, ggf. unter Nutzung einer dynamischen Mathematiksoftware, **plausibel**.*

M7 2.2, 3. KE:

*... **erklären**, wie von der Innenwinkelsumme im Dreieck auf die Innenwinkelsumme im Vieleck geschlossen werden kann.*

M10 1, 4. KE :

*... leiten mithilfe des Einheitskreises den Verlauf der Graphen der Sinus- und Kosinusfunktion ab und **begründen** insbesondere deren Periodizität sowie den Zusammenhang zwischen den beiden Funktionen.*

¹ KE: Kompetenzerwartung (Die Schülerinnen und Schüler ...)

M9 5.1, 1. KE:

... **beweisen** den Satz des Pythagoras und unterscheiden diesen klar von seiner Umkehrung, indem sie für beide Sätze jeweils Voraussetzung und Behauptung benennen. ...

Selbstverständlich soll aber das Argumentieren nicht auf die Inhalte beschränkt bleiben, die im Lehrplantext unmittelbar mit dieser Kompetenz verknüpft sind. Vielmehr gilt: Jede allgemeine mathematische Kompetenz lässt sich in jedem inhaltlichen Kontext fördern. Eine „ausgewogene“ Berücksichtigung aller allgemeinen mathematischen Kompetenzen liegt in der Verantwortung der Lehrkräfte. Da die allgemeinen mathematischen Kompetenzen immer im Verbund erworben werden, soll in jedem Lernbereich der Aufbau aller prozessbezogenen Kompetenzen gefördert werden (vgl. Fachprofil, Abschnitt „3 Aufbau des Fachlehrplans im Fach Mathematik“).

- ◆ Im LehrplanPLUS sind wichtige Aspekte des Argumentierens gezielt verankert. Dabei handelt es sich sowohl um wichtige Begründungsmuster und Beweistechniken als auch um Grundlagen für das Verständnis der Struktur von mathematischen Sätzen. In der folgenden Tabelle wird jeweils die Jahrgangsstufe genannt, in der der jeweilige Aspekt erstmals auftritt. Prinzipiell gilt: Wurde ein Begründungsmuster bzw. eine Beweistechnik im Lehrplan genannt, wird davon ausgegangen, dass bei Argumentationen in darauffolgenden Lernbereichen bzw. in höheren Jahrgangsstufen immer wieder Bezug auf dieses Begründungsmuster bzw. diese Beweistechnik genommen wird.

Jgst.	wichtige Aspekte des Argumentierens	Fachlehrplan
5	Widerlegen durch ein Gegenbeispiel	M5 1.1, 7. KE: ... überprüfen Aussagen (z. B.: <i>Von zwei ganzen Zahlen ist diejenige größer, die den größeren Betrag hat.</i>) auf ihre Richtigkeit hin und verwenden Gegenbeispiele , um Aussagen zu widerlegen.
	Begründen durch Rückgriff auf Eigenschaften/ Definitionen	M5 2, 5. KE: ...erkennen und erzeugen (...) die Vierecke Quadrat, Rechteck, Parallelogramm, Raute, Drachenviereck und Trapez (...) Sie beschreiben die charakteristischen Eigenschaften dieser Vierecke (insbesondere bezüglich deren Seiten) und verwenden diese bei Argumentationen , auch im Zusammenhang mit kopfgeometrischen Betrachtungen.
	Lösungswege vergleichend beurteilen	M5 4.2, 4. KE: ...führen Flächeninhaltsbestimmungen durch gezieltes Zerlegen und Ergänzen von Flächen unter Verwendung der Flächeninhaltsformel für Rechtecke durch; bei Aufgaben, die verschiedene Lösungswege zulassen, erläutern und beurteilen sie vergleichend diese Lösungswege .

6	Anwenden von geübten Argumentationsmustern	M6 1.2, 2. KE: ... entscheiden anhand der Primfaktorzerlegung des Nenners des vollständig gekürzten Bruchs, ob sich dieser als endlicher Dezimalbruch darstellen lässt.
	mehrschrittige Argumentationen wiedergeben	M6 2.1, 1. KE: ... erklären anhand von Beispielen, wie man, ausgehend von der Formel zur Berechnung des Flächeninhalts eines Rechtecks, unter Verwendung des Prinzips des Zerlegens und Ergänzens von Flächen die Formeln zur Berechnung der Flächeninhalte von Parallelogrammen, Dreiecken bzw. Trapezen herleiten kann.
7	mehrschrittige Argumentationen klar darstellen und selbständig erstellen	M7 2.2, 2. KE: ... beweisen , ausgehend davon, dass Wechselwinkel an parallelen Geraden gleich groß sind, dass die Innenwinkelsumme im Dreieck 180° beträgt (oder umgekehrt) und stellen die dafür notwendige mehrschrittige Argumentation klar dar . Dabei ist ihnen der Unterschied zwischen einem Fundamentalsatz und einem abgeleiteten Satz bewusst. M7 2.2, 4. KE: ... bestimmen bei Figuren mit mehrfachen Geradenkreuzungen aus gegebenen Winkeln andere in der Figur auftretende Winkel, überprüfen anhand von Winkelmaßen die Parallelität von Geraden und begründen ihre Lösungsschritte .
	Unterscheiden von Voraussetzung/Behauptung und von Satz/Kehrsatz	M7 5, 4. KE: ... unterscheiden klar zwischen Voraussetzung und Behauptung eines mathematischen Satzes und formulieren damit dessen Kehrsatz . Anhand von inner- und außermathematischen Beispielen erläutern sie, dass aus einer wahren Implikation im Allgemeinen nicht darauf geschlossen werden kann, dass auch deren Umkehrung wahr ist.
9	Grundprinzip des indirekten Beweises	M9 1, 2. KE: ... verstehen das Grundprinzip eines indirekten Beweises , vollziehen damit den Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ nach und erläutern diesen. ...
11	Unterscheiden von notwendigen und hinreichenden Bedingungen	M11 1.3, 3. KE: ... unterscheiden bei Extremstellen bzw. Wendestellen zwischen notwendigen und hinreichenden Bedingungen . Sie begründen beispielsweise, dass die Bedingung $f'(x_0) = 0$ notwendig, aber nicht hinreichend für die Existenz einer Extremstelle einer differenzierbaren Funktion f an der Stelle x_0 ist.