

Auf dem günstigsten Weg zum Führerschein

Stand: 21.09.2018

Jahrgangsstufen	FOS/BOS 10, FOS 11, BOS 12
Fach/Fächer	Mathematik
Übergreifende Bildungs- und Erziehungsziele	Sprachliche Bildung
Zeitraumen	60-90 Minuten
Benötigtes Material	zugelassener Taschenrechner

Kompetenzerwartungen**Lehrplan Mathematik FOS/BOS 10 LB 3**

Die Schülerinnen und Schüler ...

- beschreiben lineare Abhängigkeiten zwischen zwei messbaren Größen in Real-situationen aus dem Alltag (z.B. Stromtarife), den Naturwissenschaften (z.B. Temperaturkurven) und der Wirtschaft (z.B. Kosten- und Preisentwicklungen) mithilfe verschiedener Darstellungsweisen (tabellarisch, grafisch und als Funktionsgleichung). Dabei grenzen sie die zum Funktionsbegriff zugehörigen Begriffe voneinander ab (Funktion, Funktionsterm, Funktionsgleichung, Argument, Funktionswert, Nullstelle, Definitionsmenge, Wertemenge) und interpretieren deren Bedeutung im jeweiligen Zusammenhang sinnvoll.
- zeichnen die Graphen linearer Funktionen, deren Funktionsterme in der Form $m \cdot x + t$ und auch $m \cdot (x - x_0) + y_0$ vorgegeben sind. Umgekehrt bestimmen sie zu vorgegebenen Graphen linearer Funktionen die zugehörigen Funktionsgleichungen.
- ermitteln die Wertemenge einer linearen oder quadratischen Funktion auch bei eingeschränkter Definitionsmenge. Sie bestimmen besondere Eigenschaften der Funktionsgraphen, insbesondere Symmetrie, Lage oberhalb oder unterhalb der x Achse, die Koordinaten der Schnittpunkte zweier Funktionsgraphen und die Koordinaten der Achsenschnittpunkte eines Funktionsgraphen.



Lehrplan Mathematik FOS 11 LB 1,

Lehrplan Mathematik BOS 12 LB 1

Die Schülerinnen und Schüler ...

- beschreiben und ermitteln die wesentlichen Eigenschaften von linearen und quadratischen Funktionen und deren Graphen (insbesondere Nullstellen, Steigung und y -Achsenabschnitt einer Geraden, Scheitelpunkt und Öffnungsrichtung einer Parabel), um die zugehörigen Graphen zu skizzieren.
- ermitteln die Wertemenge einer ganzrationalen Funktion unter Beachtung ihrer maximalen bzw. eingeschränkten Definitionsmenge.
- treffen geeignete Aussagen zu Fragestellungen hinsichtlich anwendungsbezogener Vorgänge, die sich durch ganzrationale Funktionen modellieren lassen.
- stellen anhand ausreichend vieler bekannter Informationen über eine ganzrationale Funktion und/oder über ihren Graphen den dazugehörigen Funktionsterm auf, um damit auf weitere Eigenschaften der Funktion und/oder auf den weiteren Verlauf des Graphen zu schließen.

Aufgabe

Eine Internetrecherche nach Fahrschulen und deren Preisen zum Erwerb des Führerscheins der Klasse B in einer größeren Stadt lieferte folgende Ergebnisse¹:

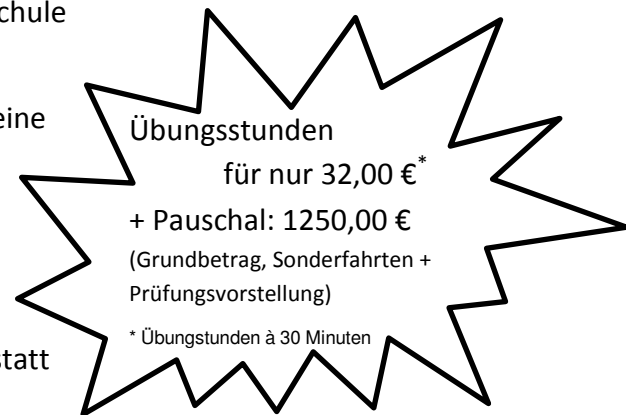
	<u>Fahrschule 1</u>	<u>Fahrschule 2</u> „Neueröffnungsspecial“
Preis pro Übungsstunde (à 45 Min.)	50,00 €	35,00 €
Preis für 12 Sonderfahrten (Pflicht!)	648,00 €	660,00 €
Grundbetrag für Klasse B (Ersterwerb)	200,00 €	350,00 € (zwei Übungsstunden inklusive!)
Vorstellung zur Theorieprüfung	42,00 €	90,00 €
Vorstellung zur praktischen Prüfung	110,00 €	250,00 €

Auf der Website von **Fahrschule 3** sind lediglich zwei Preisbeispiele gegeben. Mit 15 Übungsstunden belaufen sich die Kosten auf 1.822,00 €; bei 25 Übungsstunden werden 2.272,00 € fällig. Auch hier setzt sich der Preis aus einem Grundpreis (für 12 Sonderfahrten, Grundbetrag und Prüfungsvorstellung) und dem Preis für die Übungsstunden zusammen.

- a) Empfehlen Sie der folgenden Schülerin und den folgenden Schülern die für sie jeweils „beste“ Fahrschule, wenn davon auszugehen ist, dass sie möglichst wenig Geld ausgeben möchten. Begründen Sie Ihre Entscheidung mathematisch.
- **Felix** war während eines Highschool-Jahres in den USA und hat bereits einen amerikanischen Führerschein mit einem Auto mit Automatikgetriebe erworben. Allerdings ist dieser in Deutschland nicht anerkannt. (Er geht davon aus, dass er sich schnell an das Schaltgetriebe gewöhnt und kalkuliert mit wenig Übungsstunden.)
 - **Tina** hat noch keinerlei Fahrerfahrung. Sie verfügt weder über einen Roller- noch einen Traktorführerschein und kann sich noch erinnern, dass ihre Schwester sehr viele Übungsstunden gebraucht hat.

¹ Ohne Fremdkosten (Führerscheinbehörde, Sehtest, Erste Hilfe Kurs, Gebühren für die Theorieprüfung, Gebühren für die praktische Prüfung)

- **Fabian** kann seine Fahrkünste nicht wirklich einschätzen und fragt sich, ab wie vielen Übungsstunden sich für ihn welche Fahrschule anbietet.
- b) Tina hat nach längerer Recherche im Internet noch eine Fahrschule mit „Schnäppchenangebot“ entdeckt. Beurteilen Sie, ob es sich dabei für Tina tatsächlich um ein Schnäppchen handelt, wenn sie ansonsten Fahrschule 2 gewählt hätte.
- c) Ein anderer Schüler (Johannes) überlegt sich, ob er statt Fahrschule 1, die für ihn zu Fuß erreichbar ist, nicht eine deutlich billigere Fahrschule 15 Kilometer außerhalb der Stadt wählen sollte und die dafür anfallenden Fahrtkosten in Kauf nimmt. Im Internet hat er gelesen, dass man durchschnittlich 22 Übungsstunden benötigt, um zur praktischen Prüfung zugelassen zu werden. Lohnt sich die Fahrt mit den öffentlichen Verkehrsmitteln aufs „Land“? Begründen Sie Ihre Entscheidung.



(Hinweis: Berücksichtigen Sie die Sonderfahrten und die Theoriestunden (12 Stunden Grundstoff + 2 Stunden Zusatzstoff))

	<u>„Land“-Fahrschule</u>
Preis pro Übungsstunde (à 45 Min.)	34,00 €
Preis für 12 Sonderfahrten	586,00 €
Grundbetrag für Klasse B (Ersterwerb)	170,00 €
Vorstellung zur Theorieprüfung	35,00 €
Vorstellung zur praktischen Prüfung	109,00 €

- d) Um die Gesamtkosten für den Erwerb eines Führerscheins zu ermitteln, müssten die Fremdkosten (z.B. Führerscheinbehörde, Sehtest, Erste Hilfe Kurse etc.) berücksichtigt werden. Aktuell betragen diese rund 212,00 €. Die Fahrschulskosten lassen sich in Abhängigkeit der absolvierten Übungsstunden grafisch in einem kartesischen Koordinatensystem darstellen. Erklären Sie, wie sich die grafischen Darstellungen der Führerscheingesamtkosten in Abhängigkeit der absolvierten Übungsstunden jeweils von den entsprechenden Graphen der Fahrschulskosten unterscheiden.
- e) Formulieren Sie eine Problemstellung im Kontext Fahrschule, die zu folgender Gleichung führen kann: $40 \cdot x + 955 = 2000 - 285$

Hinweise zum Unterricht

Die Lösungsvorschläge unter den Hinweisen zum Unterricht erfolgen stichpunktartig. Diese sind nicht als vollständige, alternativlose Lösungserwartung zu sehen. Auch von einer strengen mathematischen Fachnotation wird hier abgesehen.

Die vorliegende Aufgabe ist eine Anwendungsaufgabe zum Themenbereich *lineare Funktionen* mit realistischen Zahlenwerten. Sie eignet sich neben dem Einsatz in der Vorklasse auch für die Jahrgangsstufe 11. Die Aufgabenstellung „Fall Felix“ und „Fall Tina“ in Teilaufgabe a) könnten in Einzelarbeit bearbeitet werden und „Fall Fabian“ könnte im Anschluss daran in Partnerarbeit bearbeitet werden.

mögliche Arbeitsform: Gruppenarbeit, Partnerarbeit oder Einzelarbeit

a)

Felix

Der Zusammenhang zwischen den benötigten Übungsstunden und den Fahrschulskosten wird für die verschiedenen Fahrschulen durch folgende Funktionen beschrieben.

x : Anzahl der Übungsstunden,

f_i : Anzahl x der Übungsstunden \mapsto Preis $y = f(x)$ in €; D_{f_i} passend

$$f_1(x) = 658 + 200 + 42 + 100 + 50 \cdot x = 50 \cdot x + 1000$$

$$f_2(x) = 660 + 350 + 90 + 250 + 35 \cdot (x - 2) = 35 \cdot (x - 2) + 1350 \quad (\text{für } x \geq 2)$$

für Fahrschule 3 gilt:

$$x_1 = 15 \quad y_1 = 1822,00$$

$$x_2 = 25 \quad y_2 = 2272,00$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2272 - 1822}{25 - 15} = 45 \quad \rightarrow 45 \text{ Euro pro Übungsstunde}$$

Berechnung des y -Achsenabschnitts t :

$$y = m \cdot x + t$$

$$1822 = 45 \cdot 15 + t$$

$$t = 1147$$

$$\rightarrow f_3(x) = 45 \cdot x + 1147$$

Vergleicht man Fahrschule 1 mit Fahrschule 2, so würde ich Felix Fahrschule 1 empfehlen, da hier die Kosten für die Sonderfahrten und die Pauschalen am niedrigsten sind. Die

Übungsstunden sind zwar teurer als in Fahrschule 2, aber für die 350 Euro mehr an festen Kosten bekommt er bei Fahrschule 1 bereits 7 Fahrstunden.

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &< f_3(x) \\
 50 \cdot x + 1000 &< 45 \cdot x + 1147 \\
 5 \cdot x &< 147 \\
 x &< 29,4
 \end{aligned}$$

Da nicht davon auszugehen ist, dass Felix mehr als 29 Fahrstunden benötigt, ist insgesamt Fahrschule 1 für ihn am besten geeignet. [Erst für Personen, die 30 Übungsstunden oder mehr benötigen, ist Fahrschule 3 zu empfehlen.]

Tina:

Aus den Berechnungen zu „Fall Felix“ ist bekannt, dass Fahrschule 3 im Vergleich zu Fahrschule 1 erst ab 30 Übungsstunden interessant ist.

Vergleich von Fahrschule 1 und 2:

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &< f_2(x) \\
 50 \cdot x + 1000 &< 35 \cdot (x - 2) + 1350 \\
 50 \cdot x + 1000 &< 35 \cdot x - 70 + 1350 \\
 15 \cdot x &< 280 \\
 x &< 18,7
 \end{aligned}$$

Da davon auszugehen ist, dass Tina relativ viele Übungsstunden benötigt, sollte sie Fahrschule 2 der Fahrschule 1 vorziehen, da Fahrschule 2 ab 19 Fahrstunden günstiger kommt als Fahrschule 1.

(Hinweis: Die hier vorliegende Tatsache, dass für die Vertretung des Falls relativ vieler benötigter Übungsstunden eine Schülerin, nämlich Tina, gewählt wurde, ist völlig zufällig. Name und Geschlecht können beliebig getauscht werden.)

Vergleich von Fahrschule 2 mit Fahrschule 3:

$$\begin{aligned}
 f_3(x) &< f_2(x) \\
 45 \cdot x + 1147 &< 35 \cdot (x - 2) + 1350 \\
 45 \cdot x + 1147 &< 35 \cdot x - 70 + 1350 \\
 10 \cdot x &< 133 \\
 x &< 13,3
 \end{aligned}$$

Ab einer Anzahl von 14 Übungsstunden ist Fahrschule 2 günstiger als Fahrschule 3. Daher ist Tina insgesamt Fahrschule 2 zu empfehlen.

Fabian:

Fahrschule 1 ist günstiger als Fahrschule 3 bei bis zu 29 Übungsstunden.

Fahrschule 1 ist günstiger als Fahrschule 2 bei bis zu 18 Übungsstunden.

→ Fahrschule 2 ist günstiger als Fahrschule 1 ab 19 Übungsstunden.

Fahrschule 2 ist günstiger als Fahrschule 3 ab 14 Übungsstunden.

→ Benötigt Fabian bis zu 18 Übungsstunden, so ist ihm Fahrschule 1 zu empfehlen.

Benötigt er 19 oder mehr Übungsstunden, so ist ihm Fahrschule 2 zu empfehlen.

Übersicht:

Fahrschulen nach Kosten geordnet	0 bis 13 Übungsstunden	14 bis 18 Übungsstunden	19 bis 29 Übungsstunden	mehr als 29
teuer ↑ ↓ günstig	Fahrschule 2 Fahrschule 3 Fahrschule 1	Fahrschule 3 Fahrschule 2 Fahrschule 1	Fahrschule 3 Fahrschule 1 Fahrschule 2	Fahrschule 1 Fahrschule 3 Fahrschule 2

b)

Preis für eine Übungsstunde mit 30 Minuten Dauer: 32,00 €

Preis für eine Übungsstunde mit 45 Minuten Dauer: $\frac{32}{30} \cdot 45 = 48$ [€]

Die Übungsstunden sind beim „Schnäppchenangebot“ teurer als bei Fahrschule 2. Der Preis für die restlichen Kosten ist zwar 100 Euro billiger, allerdings gleichen einmalig 100 Euro nicht den Preisunterschied von 13 Euro pro 45-minütige Übungsstunde aus, zumal bei Fahrschule 2 bereits zwei Übungsstunden im Grundbetrag enthalten sind.

c)

Kosten bei der „Land“-Fahrschule in Abhängigkeit von der Anzahl der Übungsstunden:

$$I(x) = 34 \cdot x + 900$$

$$I(22) = 22 \cdot 34 + 900 = 1648$$

$$f_1(22) = 50 \cdot 22 + 1000 = 2100$$

$$\text{Ersparnis: } 2100 - 1648 = 452$$

Anzahl der notwendigen Hin- und Rückfahrten für Fahrstunden, Theoriestunden und Prüfungsfahrten (Theorieprüfung & praktische Prüfung):



$$12 + 14 + 22 + 2 = 50$$

$$452 : 50 = 9,04$$

Die Fahrt aufs Land lohnt sich nur, wenn eine Hin- und Rückfahrt weniger als 9,04 € kostet. Hätte Johannes die Möglichkeit mehrere Theorie- oder Fahrstunden am Block zu absolvieren, so würde sich die „Land“-Fahrschule auch bei noch höheren Fahrtkosten für Hin- und Rückfahrt zur Fahrschule rentieren. Selbiges gilt, falls der Verkehrsverbund Wochen-, 10er- bzw. Monatskarten anbietet.

d) Die Gesamtkosten liegen jeweils 212,00 € höher als die Fahrschulkosten. Die jeweiligen Graphen G_{f_i} werden dadurch im x - y -Koordinatensystem um 212 Einheiten in Richtung der y -Achse nach oben verschoben.

e) Franz hat 2000 Euro zur Verfügung und möchte damit seinen Führerschein finanzieren. Wie viele Übungsstunden kann er sich leisten, wenn die Festkosten (12 Sonderfahrten, Grundbetrag für Klasse B, Vorstellung zur Theorieprüfung und praktischen Prüfung) 955 Euro betragen und eine Übungsstunde 40 Euro kostet? Von den 2000 Euro muss er auch die Fremdkosten und anfallende Fahrtkosten bezahlen.