Ganzrationale Funktionen

Stand: 10.05.2019

Jahrgangsstufen	FOS 11, BOS 12
Fach/Fächer	Mathematik
Übergreifende Bildungs- und Erziehungsziele	
Zeitrahmen	45 Minuten
Benötigtes Material	Die Aufgabe soll ohne Verwendung von Hilfsmitteln gelöst werden.

Kompetenzerwartungen

Lehrplan Mathematik FOS 11 LB 1,
Lehrplan Mathematik BOS 12 LB 1

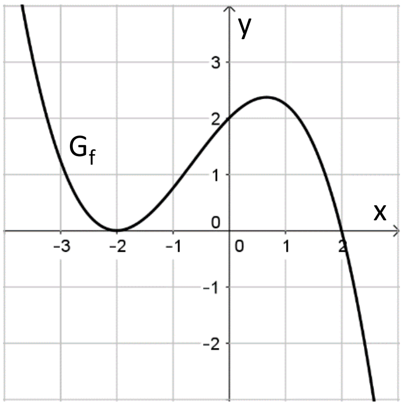
Die Schülerinnen und Schüler …

- ermitteln die Wertemenge einer ganzrationalen Funktion unter Beachtung ihrer maximalen bzw. eingeschränkten Definitionsmenge.
- ermitteln Nullstellen ganzrationaler Funktionen samt ihrer Vielfachheit mithilfe geeigneter Verfahren: Ausklammern, Anwenden binomischer Formeln, systematisches Probieren, Polynomdivision und Substitution. Sie stellen den Funktionsterm vollständig faktorisiert dar und bestimmen das Vorzeichenverhalten der Funktionswerte in der Umgebung der Nullstellen, um damit den Graphen der Funktion zu skizzieren. Außerdem berechnen sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte zweier Funktionsgraphen.
- beschreiben das Verhalten der Funktionswerte ganzrationaler Funktionen für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$ und entscheiden, ob die Funktionsgraphen eine Symmetrie (Achsensymmetrie zur y-Achse, Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung) aufweisen.

- zeichnen bzw. skizzieren die Graphen von ganzrationalen Funktionen, um z. B. die Lösungsmenge von Ungleichungen, in denen ganzrationalen Terme vorkommen, anzugeben. Dabei nutzen sie vorgegebene oder bereits durch Rechnung ermittelte Eigenschaften der Funktionen.
- stellen anhand ausreichend vieler bekannter Informationen über eine ganzrationale Funktion und/oder über ihren Graphen den dazugehörigen Funktionsterm auf, um damit auf weitere Eigenschaften der Funktion und/oder auf den weiteren Verlauf des Graphen zu schließen.

Aufgabe

1. In der Abbildung ist der Graph der ganzrationalen Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$ ausschnittsweise zu sehen. Markieren Sie den zugehörigen Funktionsterm.



○ $f(x) = \frac{1}{4}(x+2)^2(x-2)$

○ $f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2(x-2)$

○ $f(x) = -\frac{1}{4}(x^2-4)(x+2)$

○ $f(x) = -\frac{1}{4}(x-2)^2(x+2)$

○ $f(x) = -\frac{1}{2}(x^2-4)(x+2)$

2. Für eine ganzrationale Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$ vom Grad n mit dem Leitkoeffizienten a_n gilt: $x \to \pm\infty \;\Rightarrow\; f(x) \to \infty$.
Entscheiden Sie, welche Aussage richtig ist.

○ n ist ungerade und a_n ist positiv.

○ n ist gerade und a_n ist negativ.

○ n ist gerade und a_n ist positiv.

○ n ist ungerade und a_n ist negativ.

3. Bestätigen oder widerlegen Sie folgende Aussage:
„Eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte ganzrationale Funktion dritten Grades mit negativem Leitkoeffizienten hat mindestens eine Nullstelle.“

4. Die Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$ ist eine ganzrationale Funktion vierten Grades. Geben Sie zu folgenden Aussagen einen jeweils passenden Funktionsterm Ihrer Wahl an.

a) Die Funktion f hat keine Nullstelle.

b) Die Funktion f hat eine Nullstelle.

c) Die Funktion f hat zwei Nullstellen.

d) Die Funktion f hat drei Nullstellen.

e) Die Funktion f hat vier Nullstellen.

5. Geben Sie jeweils die Wertemenge der Funktion $f: x \mapsto f(x)$ an.
   Begründen Sie dabei stets Ihre Aussage.

   a) $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 \cdot (x-3)^2$ mit $D_f = \mathbb{R}$

   b) $f(x) = \frac{3}{4}x \cdot (x-1)^2$ mit $D_f = \mathbb{R}_0^-$

   c) $f_a(x) = -\frac{2}{3}(x-2)^2 + a$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $D_{f_a} = \mathbb{R}$.

6. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung.

$$-\frac{1}{2}(x^2-4)(x^2+2x-8) > 0$$

7. Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto f(x)$ durch den Funktionsterm $f(x) = -\frac{1}{4}(x-4)(x+2)(x^2-2x+2a)$ mit $D_f = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie, für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ die Funktion f genau zwei Nullstellen besitzt.

8. Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto f(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x+3)(ax^2+bx+1)$ mit $D_f = \mathbb{R}$ und $a,b \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Werte von $a,b \in \mathbb{R}$ so, dass der Graph der Funktion f achsensymmetrisch zur y-Achse verläuft.

Hinweise zum Unterricht

Die Lösungsvorschläge unter den Hinweisen zum Unterricht erfolgen stichpunktartig. Diese sind nicht als vollständige, alternativlose Lösungserwartung zu sehen. Auch von einer strengen mathematischen Fachnotation wird hier abgesehen.

1. $f(x) = -\frac{1}{4}\left(x^2 - 4\right)(x+2)$

2. n ist gerade und der Formfaktor a_n ist positiv.

3. Für eine ganzrationale Funktion dritten Grades mit negativem Formfaktor gilt: Für $x \to -\infty \;\Rightarrow\; f(x) \to \infty$ und für $x \to \infty \;\Rightarrow\; f(x) \to -\infty$. Somit muss die Funktion f – da sie stetig ist – mindestens eine Nullstelle besitzen.

4. a) $f(x) = x^4 + 1$

   b) $f(x) = x^2\left(x^2 + 1\right)$

   c) $f(x) = x(x-2)\left(x^2 + 1\right)$

   d) $f(x) = x^2(x-2)(x+2)$

   e) $f(x) = x(x-2)(x+1)(x+4)$

5. a) $W_f =]-\infty;0]$

   Begr.: Für $x \to \pm\infty \;\Rightarrow\; f(x) \to -\infty$; der Graph der Funktion f hat zwei doppelte Nullstellen

   b) $W_f =]-\infty;0]$

   Begr.: $x \to -\infty \;\Rightarrow\; f(x) \to -\infty$ und $f(0) = 0$; keine weiteren Nullstellen in $D_f = \mathbb{R}_0^-$.

   c) $W_{f_a} =]-\infty;a]$

   Begr.: Der Graph der Funktion f ist eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitel $S(2|a)$.

6. Mithilfe einer Vorzeichentabelle folgt: $L =]-4;-2[$.

7. *Hinweis: Da bei den Aufgaben 7 und 8 der Term als Produkt aus zwei Linearfaktoren und einem quadratischen Faktor gegeben ist, lässt sich die Lösung auf die Untersuchung eines quadratischen Terms mit Parameter reduzieren. Somit stehen diese Aufgaben nicht im Widerspruch zum Lehrplan für die nichttechnischen Ausbildungsrichtungen.*

   Da die Funktion f schon zwei Nullstellen besitzt $\left(x_1 = -2 \text{ und } x_2 = 4\right)$, …

   i) darf die Gleichung $x^2 - 2x + 2a = 0$ keine Lösung mehr besitzen.

      Also: $D = (-2)^2 - 4 \cdot 2a < 0 \;\Rightarrow\; 4 - 8a < 0 \;\Rightarrow\; a > \frac{1}{2}$

   ii) muss die Gleichung $x^2 - 2x + 2a = 0$ die beiden Lösungen $x_1 = -2 \text{ und } x_2 = 4$ haben.

      Also: $(x-4)(x+2) = x^2 - 2x - 8 \;\Rightarrow\; a = -4$

   iii) muss die Gleichung $x^2 - 2x + 2a = 0$ als einzige Lösung eine der beiden Nullstellen haben. Diese müsste dann doppelt sein. Also: $D = 4 - 8a = 0 \;\Rightarrow\; a = \frac{1}{2}$

      Dann würde gelten: $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1$

      Das wären aber dann drei Nullstellen!

   Insgesamt folgt: Für $a = -4$ und für $a > \frac{1}{2}$ hat die Funktion f nur zwei Nullstellen.

8. Damit der Graph der Funktion f achsensymmetrisch zur y-Achse verläuft, müssen auch die Nullstellen der Funktion f achsensymmetrisch zur y-Achse sein. Also muss die Gleichung $ax^2 + bx + 1 = 0$ die beiden Lösungen $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$ besitzen. Das führt dann auf das Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} a - b + 1 &= 0 \\ 9a + 3b + 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \;\Rightarrow\; a = -\tfrac{1}{3} \text{ und } b = \tfrac{2}{3}$$