# Graphen ganzrationaler Funktionen

Stand: 21.09.2018

| | |
|---|---|
| Jahrgangsstufen | FOS 11, BOS 12 |
| Fach/Fächer | Mathematik |
| Übergreifende Bildungs- und Erziehungsziele | |
| Zeitrahmen | 45 Minuten |
| Benötigtes Material | Die Aufgabe soll ohne Verwendung von Hilfsmitteln bearbeitet werden. |

## Kompetenzerwartungen

**Lehrplan Mathematik FOS 11 LB 1**
**Lehrplan Mathematik BOS 12 LB 1**

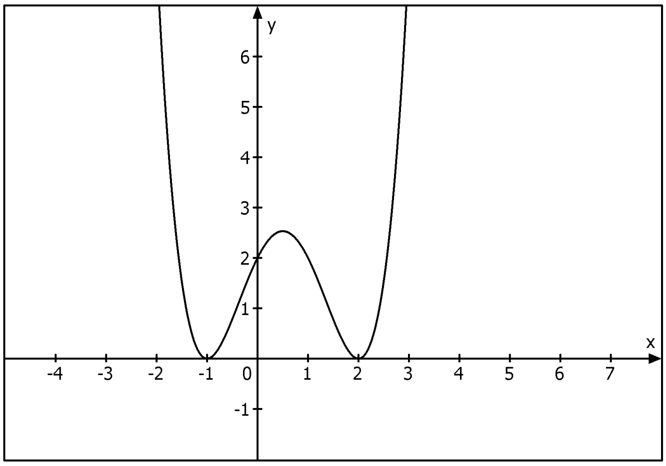
Die Schülerinnen und Schüler …

- ermitteln die Wertemenge einer ganzrationalen Funktion unter Beachtung ihrer maximalen bzw. eingeschränkten Definitionsmenge.
- ermitteln Nullstellen ganzrationaler Funktionen samt ihrer Vielfachheit mithilfe geeigneter Verfahren: Ausklammern, Anwendung binomischer Formeln, systematisches Probieren, Polynomdivision und Substitution. Sie stellen den Funktionsterm vollständig faktorisiert dar und bestimmen das Vorzeichenverhalten der Funktionswerte in der Umgebung der Nullstellen, um damit den Graphen der Funktion zu skizzieren. Außerdem berechnen sie die Koordinaten der Schnittpunkte zweier Funktionsgraphen.
- beschreiben das Verhalten der Funktionswerte ganzrationaler Funktionen für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$ und entscheiden, ob die Funktionsgraphen eine Symmetrie (Achsensymmetrie zur y-Achse, Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung) aufweisen.

- zeichnen bzw. skizzieren die Graphen von ganzrationalen Funktionen, um z. B. die Lösungsmenge von Ungleichungen, in denen ganzrationalen Terme vorkommen, anzugeben. Dabei nutzen sie vorgegebene oder bereits durch Rechnung ermittelte Eigenschaften der Funktionen.
- treffen geeignete Aussagen zu Fragestellungen hinsichtlich anwendungsbezogener Vorgänge, die sich durch ganzrationale Funktionen modellieren lassen.
- stellen anhand ausreichend vieler bekannter Informationen über eine ganzrationale Funktion und/oder über ihren Graphen den dazugehörigen Funktionsterm auf, um damit auf weitere Eigenschaften der Funktion und/oder auf den weiteren Verlauf des Graphen zu schließen.

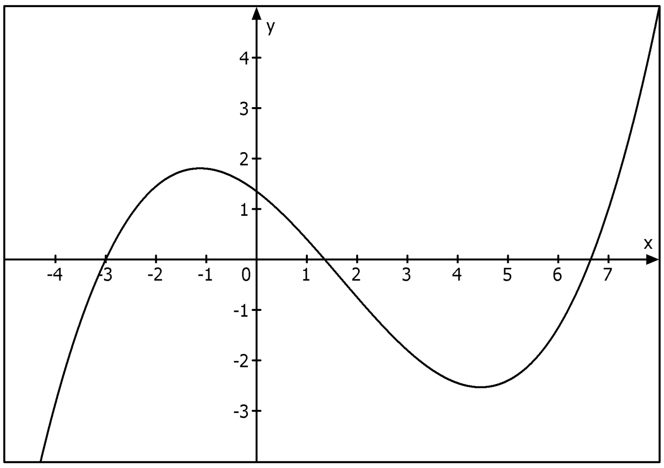
# Aufgabe

Die folgenden Abbildungen zeigen die Graphen der ganzrationalen Funktionen $f$ (Grad 4), $g$ (Grad 3) und $h$ (Grad 5) mit $D_f = D_g = D_h = \mathbb{R}$.



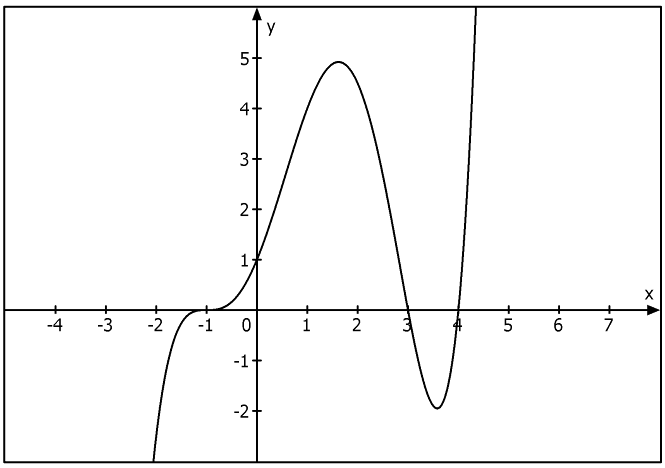

**Graph von *f***

Abbildung 1




**Graph von *g***

Abbildung 2




**Graph von *h***

Abbildung 3

Bearbeiten Sie zunächst in Einzelarbeit die folgenden Fragestellungen ohne Verwendung von Hilfsmitteln. Tauschen Sie nach dem Ende der Arbeitszeit von ca. 30 Minuten Ihre Lösung mit der Ihrer Nachbarin/Ihres Nachbarn aus und verbessern Sie diese mithilfe des bereit liegenden Lösungsblattes. Klären Sie vorhandene Unklarheiten dann im Partnergespräch.

1. Bestimmen Sie den Funktionsterm der Funktion f und geben Sie die Wertemenge dieser Funktion an.

2. Die Funktionsgleichung der Funktion $g: x \mapsto g(x)$ lautet $g(x) = \frac{1}{20}(x^3 - 5x^2 - 15x + 27)$

   Eine der drei Nullstellen von $g$ ist ganzzahlig.

   Berechnen Sie die (exakte) Lage der beiden nichtganzzahligen Nullstellen von *g* und ihre jeweilige Vielfachheit sowie die Koordinaten des Schnittpunkts des Graphen von g mit der y-Achse.

3. Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte der Funktion g für $x \to \infty$ sowie für $x \to -\infty$ an.

4. Eine weitere Funktion $k: x \mapsto k(x)$ mit $D_k = \mathbb{R}$ ist gegeben durch

   $k(x) = x^3 - 5x^2 - 15x + 27$.

   Beschreiben Sie ohne weitere Rechnung, wie sich die Graphen der Funktionen g und k bezüglich ihrer Schnittpunkte mit beiden Koordinatenachsen unterscheiden.

5. Bestimmen das Intervall $A \subseteq D_k$, in dem der Graph von *h* unterhalb der x-Achse verläuft.

6. Gegeben sind die folgenden Funktionsgleichungen von ganzrationalen Funktionen:

   1. $y = 2 \cdot (x+1)^2 \cdot (x-3) \cdot (x-4)$
   2. $y = 4 \cdot (x+1) \cdot (x+3) \cdot (x+4)$
   3. $y = \frac{1}{2} \cdot (x+1)^3 \cdot (x-3) \cdot (x-4)$
   4. $y = \frac{1}{12} \cdot (x+1)^3 \cdot (x-3) \cdot (x-4)$

   Begründen Sie, welche Funktionsgleichung die Funktion h beschreibt.

## Hinweise zum Unterricht

**Die Lösungsvorschläge unter den Hinweisen zum Unterricht erfolgen stichpunktartig. Diese sind nicht als vollständige, alternativlose Lösungserwartung zu sehen. Auch von einer strengen mathematischen Fachnotation wird hier abgesehen.**

**Mögliche Arbeitsform:**

Wechsel zwischen Einzel- und Partnerarbeit

Die Schülerinnen und Schüler erhalten die Graphen dreier ganzrationaler Funktionen und bearbeiten in einem ersten Schritt die verschiedenen Aufgaben in Einzelarbeit in ihrem individuellen Tempo; vermutlich werden nicht alle Schülerinnen und Schüler alle Teilaufgaben in der empfohlenen Arbeitszeit von 30 Minuten vollständig bearbeiten können.

Nach dem Ende der Arbeitszeit erhalten alle Schülerinnen und Schüler eine Lösung und korrigieren den Test ihres Tandempartners. Im dritten Schritt besprechen die beiden Arbeitspartner im Rahmen einer Partnerarbeit diese Lösungen; eventuell ist zusätzlich Hilfe durch die Lehrkraft nötig.

1. $f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x+1)^2 \cdot (x-2)^2$

   Wertemenge $W_f = IR_0^+$

2. Ablesen der ganzzahligen Nullstelle: $x_1 = -3$

   $$(x^3 - 5x^2 - 15x + 27) : (x+3) = x^2 - 8x + 9$$

   $x^2 - 8x + 9 = 0$: $\quad x_{2/3} = \frac{8 \pm \sqrt{64-4 \cdot 1 \cdot 9}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{28}}{2} = 4 \pm \sqrt{7}$

   $x_2 = 4 + \sqrt{7} \qquad x_3 = 4 - \sqrt{7}$ (alle Nullstellen sind einfach)

   $S_y\,(0|1{,}35)$

3. $x \to \infty \Rightarrow g(x) \to \infty \qquad x \to -\infty \Rightarrow g(x) \to -\infty$

4. x-Achse: identische Schnittpunkte

   y-Achse: $S_y\,(0/1{,}35) \leftrightarrow S_y\,(0/27)$.

5. $x \in ]-\infty;-1[$ oder $x \in ]3;4[$

6. Gleichung 4 ist die Funktionsgleichung von h.