

Gebrochen-rationale Funktionen

Stand: 26.10.2018

Jahrgangsstufen	FOS 12 (T), BOS 12 (T), FOS 13 (NT), BOS 13 (NT)
Fach/Fächer	Mathematik
Übergreifende Bildungs- und Erziehungsziele	
Benötigtes Material	Die Aufgabe sollte bevorzugt ohne Verwendung von Hilfsmitteln bearbeitet werden.

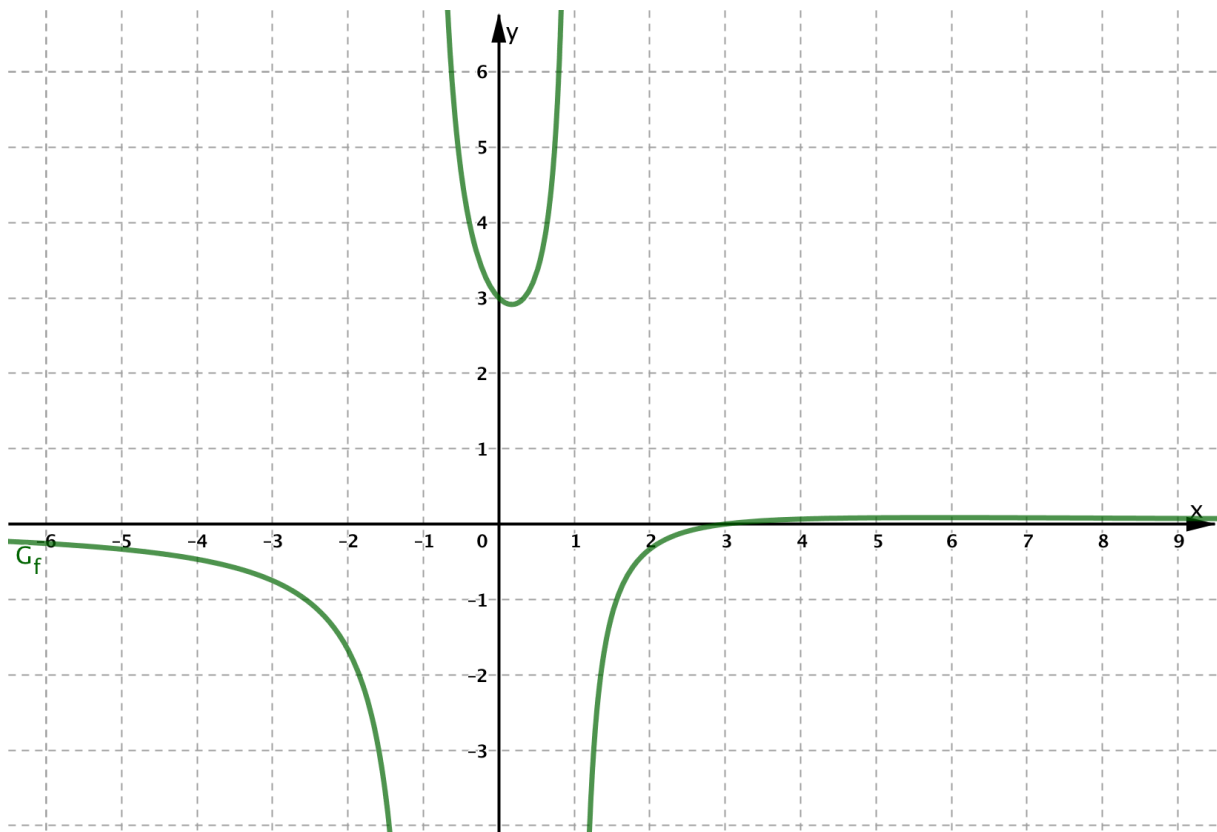
Kompetenzerwartungen**Lehrplan Mathematik FOS/BOS 13 (nichttechnische Ausbildungsrichtungen) LB 1****Lehrplan Mathematik FOS/BOS 12 Additum (technische Ausbildungsrichtung) LB 3**

Die Schülerinnen und Schüler ...

- beschreiben und ermitteln die grundlegenden Eigenschaften (insbesondere Definitionsmenge, Art der Definitionslücken, Achsensymmetrie zur y-Achse, Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen) von echt und unecht gebrochen-rationale Funktionen und deren Graphen, um damit auch die Graphen der Funktionen einschließlich ihrer Asymptoten zu skizzieren bzw. zu zeichnen.
- bestimmen das Verhalten der Funktionswerte einer gebrochen-rationale Funktion in der Umgebung der Definitionslücken der Funktion und für $x \rightarrow \infty$ bzw. für $x \rightarrow -\infty$ (auch mithilfe der Polynomdivision), um zu entscheiden, ob der Funktionsgraph (senkrechte, waagrechte, schräge) Asymptoten besitzt und auf welche Weise sich der Funktionsgraph jeweils an diese Asymptoten annähert. Sie bestimmen auch die Gleichungen aller vorhandenen Asymptoten.

Aufgabe

1. Gegeben ist der Ausschnitt des Graphen einer gebrochen-rationalen Funktion f . Wählen Sie die passende Funktionsgleichung von f aus, indem Sie Ausschlusskriterien bzw. möglichst viele bekräftigende Argumente zu den vorhandenen Auswahlmöglichkeiten formulieren.



1

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-3}$$

2

$$f(x) = \frac{3x-9}{(x+1)(x-1)}$$

3

$$f(x) = \frac{x-3}{(x+1)(x-1)}$$

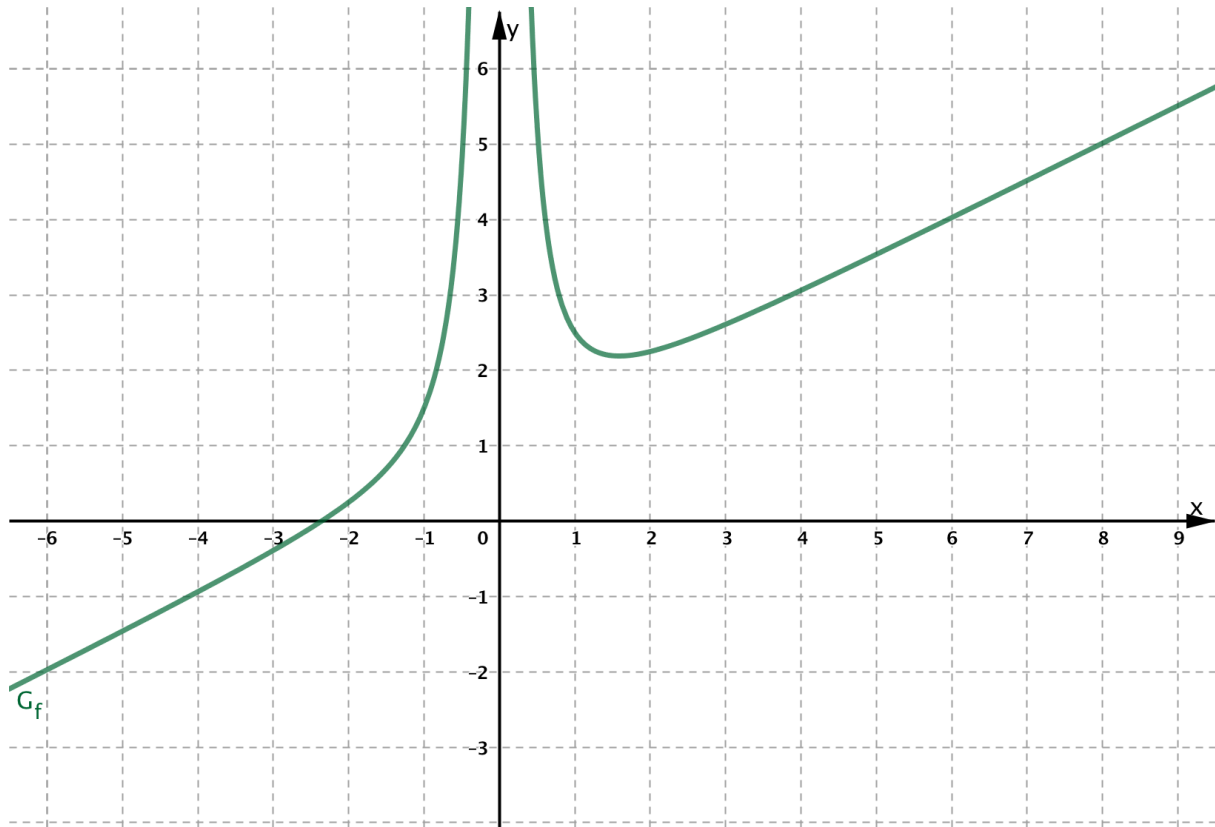
4

$$f(x) = \frac{3-x}{(x+1)(x-1)}$$

2. Der Graph einer gebrochen-rationalen Funktion f schneidet die x -Achse an der Stelle $x = -1$ und besitzt eine waagrechte Asymptote mit der Gleichung $y = 3$. Außerdem besitzt f eine Unendlichkeitsstelle (Polstelle) mit Vorzeichenwechsel an der Stelle $x = 1$ und eine stetig behebbare Definitionslücke an der Stelle $x = -3$. Zudem gilt: $f(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow 1^+$.

Skizzieren Sie in einem Koordinatensystem einen möglichen Graphen G_f mit seinen sämtlichen Asymptoten.

3. Gegeben ist der Ausschnitt des Graphen einer gebrochen-rationalen Funktion f . Kreuzen Sie alle eindeutig falschen Aussagen bezüglich des Graphen der Funktion f an und begründen Sie Ihre Entscheidung jeweils.



- Die gebrochen-rationale Funktion f besitzt keine Nullstelle.
 - Der Graph von f hat eine waagrechte Asymptote mit der Gleichung $x = 0$.
 - Der Graph der Funktion f hat eine senkrechte Asymptote mit der Gleichung $x = 0$.
 - Der Graph von f hat eine schräge Asymptote mit der Gleichung $y = -0,5x + 1$.
 - Die maximale Definitionsmenge der Funktion f ist $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
 - Die gebrochen-rationale Funktion f hat eine Unendlichkeitsstelle (Polstelle) mit Vorzeichenwechsel an der Stelle $x = 0$.
 - Der Graph der Funktion f verläuft symmetrisch zur y -Achse.
4. Der Graph einer gebrochen-rationalen Funktion f besitzt drei Asymptoten mit folgenden Gleichungen:
 $x = -2$, $x = 2$ und $y = -0,5$

Geben Sie einen möglichen Funktionsterm $f(x)$ an, der zur Funktion f passt.

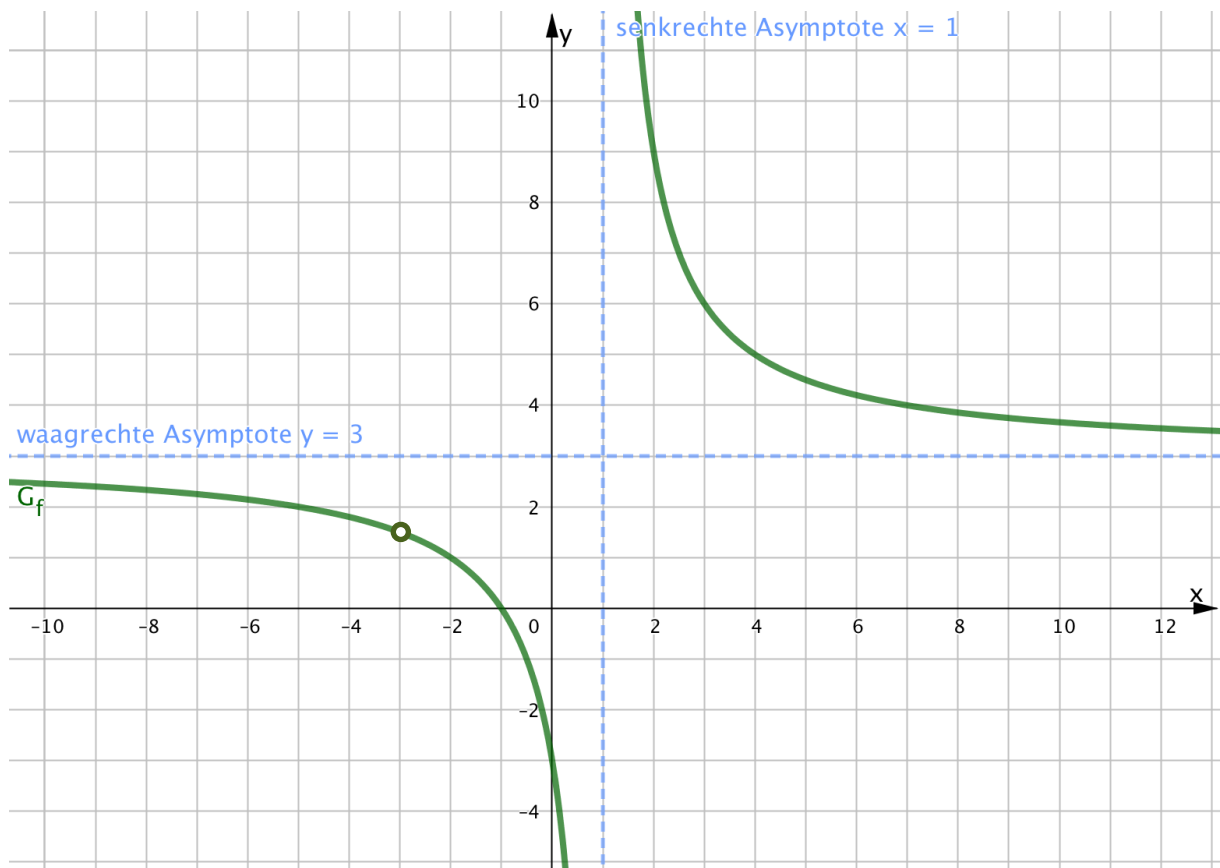
Hinweise zum Unterricht

Die Lösungsvorschläge unter den Hinweisen zum Unterricht erfolgen stichpunktartig. Diese sind nicht als vollständige, alternativlose Lösungserwartung zu sehen. Auch von einer strengen mathematischen Fachnotation wird hier abgesehen.

Lösungshinweise:

1. Korrekte Funktionsgleichung: $f(x) = \frac{x-3}{(x+1)(x-1)}$

2.



3. Falsch sind:

- „Die gebrochen-rationale Funktion f besitzt keine Nullstelle.“
Begr.: Der Graph G_f schneidet die x -Achse, somit besitzt f eine Nullstelle.

- „Der Graph von f hat eine waagrechte Asymptote mit der Gleichung $x = 0$.“
Begr.: Der Graph von f hat keine waagrechte Asymptote, die Gerade mit der Gleichung $x = 0$ ist eine senkrechte Asymptote.

- „Der Graph von f hat eine schräge Asymptote mit Gleichung $y = -0,5x + 1$.“
Begr.: Die schräge Asymptote des Graphen von f hat eine positive Steigung.

- „Die gebrochen-rationale Funktion f hat eine Unendlichkeitsstelle (Polstelle) mit Vorzeichenwechsel an der Stelle $x = 0$.“
Begr.: Die Unendlichkeitsstelle (Polstelle) an der Stelle $x = 0$ ist eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

- „Der Graph der Funktion f verläuft symmetrisch zur y -Achse.“
Begr.: Der Graph der Funktion f ist nicht symmetrisch zur y -Achse.

4. Z. B.:
$$f(x) = \frac{x^2}{-2(x-2)(x+2)}$$