

Kerzenlieferung

Stand: 10.08.2020

Jahrgangsstufen	FOS 12 (NT), BOS 12 (NT), FOS 13 (T), BOS 13 (T)
Fach/Fächer	Mathematik
Übergreifende Bildungs- und Erziehungsziele	Sprachliche Bildung
Benötigtes Material	Tafelwerk zur Stochastik

Kompetenzerwartungen

Lehrplan Mathematik FOS12 (nichttechnische Ausbildungsrichtungen) LB 7

Lehrplan Mathematik BOS12 (nichttechnische Ausbildungsrichtungen) LB 11

Lehrplan Mathematik FOS13/BOS 13 (technische Ausbildungsrichtung) LB 11

Die Schülerinnen und Schüler ...

- stellen für Realsituationen Hypothesen bezüglich einer bestimmten Grundgesamtheit auf und erläutern ihr Vorgehen, sich anhand einer Stichprobe aus dieser Grundgesamtheit mithilfe einer sinnvollen Entscheidungsregel für oder gegen diese Hypothesen zu entscheiden.
- formulieren die Testgröße (nur binomialverteilt) im Rahmen eines Hypothesentests. Sie entwickeln eine für die Nullhypothese geeignete Entscheidungsregel durch die Angabe eines Annahmebereichs und Ablehnungsbereichs, und untersuchen, wie sich das Verändern dieser Bereiche auf fehlerhafte Entscheidungen auswirkt.
- ermitteln beim einseitigen Signifikanztest mit binomialverteilter Testgröße zu einem vorgegebenen Signifikanzniveau den maximalen Ablehnungs- bzw. Annahmebereich der Nullhypothese. Sie beschreiben die dabei auftretenden Fehler erster und zweiter Art und berechnen und beurteilen deren Wahrscheinlichkeiten (Risiken erster und zweiter Art).

Aufgabe

Zwischen Aylin und Ines, beide Mitglieder des Eventmanagement-Wahlkurses und gerade mit der Vorbereitung des unmittelbar bevorstehenden Abiballes beschäftigt, fand folgender Chat statt:

Hi Ines, wie läuft's? Sind eigentlich die Kerzen für die Tischdeko schon geliefert worden?
LG Aylin

Mi, 11:45

Hallo Aylin. Ach, totales Chaos hier. ☹️ Aber es wird. Die 200 Kerzen sind schon da, ja. Wurden gerade 10 Kartons hier abgegeben.
Bussi Ines

Mi, 11:56 ✓

Du, unsere Kursleiterin Frau Maler hat gemeint, wir müssen die ganz dringend sofort checken. Die könnten ja ganz leicht zerbrechen oder Sprünge haben. Die kosten ja doch auch einiges.

Mi, 11:58

Hey echt Aylin. Für so was hab ich gerade gar keine Zeit. 200 Kerzen? Soll mich jetzt dann um die Technik kümmern.

Mi, 12:06 ✓

Ja ich weiß. Aber die Maler sagte, dass es wirklich wichtig ist, dass die sofort geprüft werden. Der Hersteller meinte wohl, dass garantiert 90 % der Kerzen ok sind. Wären zu viele Kerzen kaputt, würden wir einen Nachlass bekommen oder könnten die Kerzen zurückgeben. Biiitte Ines, ich schaffs nicht vor 3 Uhr bei euch zu sein!
LG Aylin

Mi, 12:08

Na schön. Aber ich schau mir jetzt nicht alle 200 Kerzen an. Ich mach mal schnell einen Karton auf und prüfe die 20 Kerzen da drin. Wenn dann mehr als 2 hinüber sind, geben wir Frau Maler Bescheid, dass wir einen Nachlass fordern. Ines

Mi, 12:16 ✓

Sicher? Glaubst du wirklich, es reicht aus, 20 Kerzen zu testen? Naja, gib mir bitte auf alle Fälle Bescheid. Frau Maler möchte über die Kerzenlieferung informiert werden. Bis später!
Bussi Aylin

Mi, 12:22



Arbeitsauftrag

Überprüfen Sie rechnerisch, ob Ines' geplante Stichprobe aussagekräftig ist und entwickeln Sie gegebenenfalls einen besser geeigneten Test. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse im Sachzusammenhang.

Gestufte Hilfe I

1. Berechnen Sie das Risiko 1. Art, wenn Ines' Entscheidungsregel angewandt wird.
2. Entwickeln Sie einen geeigneten Hypothesentest auf einem sinnvollen Signifikanzniveau.

Gestufte Hilfe II

1. Das Risiko 1. Art ist die Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese aufgrund der Stichprobe abzulehnen, obwohl sie in der Grundgesamtheit richtig ist. In diesem Fall würde es bedeuten, dass aufgrund von Ines' Stichprobenergebnis ein Nachlass für die Kerzenlieferung gefordert wird, obwohl tatsächlich nicht mehr als 10 % der Kerzen beschädigt sind.
Geben Sie also Ines' Ablehnungsbereich an und ermitteln Sie anschließend die Wahrscheinlichkeit, den α -Fehler zu begehen.
2. Da das Risiko 1. Art bei Ines' Vorgehen sehr hoch ist, soll dieses auf z. B. maximal 5 % („signifikanter Test“) oder auf maximal 1 % („hochsignifikanter Test“) reduziert werden.
Legen Sie also ein Signifikanzniveau fest und entwickeln Sie einen geeigneten Hypothesentest. Geben Sie dazu die Testgröße an, die Nullhypothese und die Gegenhypothese und ermitteln Sie anschließend die kritische Zahl k , welche den Annahme- und Ablehnungsbereich (also die Entscheidungsregel) festlegt.

Zusatzaufgabe

Stellen Sie eine Vermutung auf, wie sich das Risiko 2. Art von Ines' Entscheidungsregel zu Ihrer Entscheidungsregel verändern würde, wenn bekannt wäre, dass die tatsächliche Wahrscheinlichkeit für eine fehlerhafte Kerze bei 12,5 % liegt.

Überprüfen Sie Ihre Vermutung anschließend durch Rechnung.

Hinweise zum Unterricht

Die Lösungsvorschläge unter den Hinweisen zum Unterricht erfolgen stichpunktartig. Diese sind nicht als vollständige, alternativlose Lösungserwartung zu sehen. Auch von einer strengen mathematischen Fachnotation wird hier abgesehen.

Mögliche Sozialformen:

Die Aufgabe ist sowohl für Einzel-, Partner als auch Gruppenarbeit geeignet.

Differenzierungsmöglichkeiten:

Die gestuften Hilfen bieten Möglichkeiten zu Differenzierung für schwächere Schüler, welche Schwierigkeiten mit dem offenen Arbeitsauftrag haben. Es sollte darauf geachtet werden, dass die Schüler zunächst die gestufte Hilfe I nutzen müssen bevor sie die gestufte Hilfe II erhalten (z. B. Auslage am Materialtisch oder Ausdruck als Hilfekärtchen).

Für sehr schnelle und starke Schüler stellt die Zusatzaufgabe eine Differenzierungsmöglichkeit dar.

Lösungsvorschlag:

Zu 1: Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art für Ines' Vorgehen

$$p_0 = 0,10$$

Ines' Entscheidungsregel: $A = \{0; 1; 2\}$, $\bar{A} = \{3; 4; \dots; 20\}$

Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art:

$$P(\alpha) = \sum_{i=3}^{20} B(20; 0,1; i) = 1 - \sum_{i=0}^{2} B(20; 0,1; i) = 1 - 0,67693 = 0,32307$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass aufgrund von Ines' Stichprobenergebnis ein Nachlass gefordert wird (also davon ausgegangen wird, dass mehr als 10 % der Kerzen Mängel aufweisen), obwohl in der Gesamtheit nur 10 % der Kerzen mangelhaft sind, liegt bei 32,31 %. Somit ist Ines' Stichprobe wenig aussagekräftig.

Zu 2: Hypothesentest auf einem Signifikanzniveau von 5 %

Testgröße T: Anzahl der fehlerhaften Kerzen unter den 20 getesteten Kerzen.

Nullhypothese: $p_0 = 0,10$

Gegenhypothese: $p_1 > 0,10$ (rechtsseitiger Hypothesentest)

$A = \{0; \dots; k\}$, $\bar{A} = \{k + 1; \dots; 20\}$

$$\sum_{i=k+1}^{20} B(20; 0,1; i) \leq 0,05$$

$$1 - \sum_{i=0}^k B(20; 0,1; i) \leq 0,05$$

$$\sum_{i=0}^k B(20; 0,1; i) \geq 0,95$$

$$k = 4$$

$A = \{0; \dots; 4\}$, $\bar{A} = \{5 \dots; 20\}$

Die Kerzenlieferung darf also entgegengenommen werden, wenn bei der Stichprobe maximal 4 fehlerhafte Kerzen entdeckt werden. Ab 5 fehlerhaften Kerzen kann auf einem Signifikanzniveau von 5 % davon ausgegangen werden, dass die Angabe des Lieferanten falsch ist. In diesem Fall sollte die Lieferung nicht entgegengenommen werden oder ein Nachlass gefordert werden.

Zur Zusatzaufgabe:

Vermutung: ...

Rechnung:

$$P(\beta)_{\text{Ines}} = \sum_{i=0}^2 B(20; 0,125; i) = 0,5531$$

$$P(\beta)_{\text{neu}} = \sum_{i=0}^4 B(20; 0,125; i) = 0,90499$$

Da der Annahmehbereich zur Verringerung des Risikos 1. Art ausgeweitet wird, erhöht sich dadurch das Risiko 2. Art (die Nullhypothese aufgrund des Stichprobenergebnisses anzunehmen, obwohl sie in der Grundgesamtheit nicht zutrifft).



Anregung zum weiteren Lernen

Man könnte Stichproben im Unterricht durchführen lassen.

Man könnte weitere Vermutungen aufstellen und diese anschließend prüfen lassen, z. B.:
Wie verändert sich das Risiko 2. Art, wenn die tatsächliche Wahrscheinlichkeit für eine fehlerhafte Kerze 0,05 (statt 0,125 siehe Zusatzaufgabe) beträgt?