

Quadratzahlen und Dreieckszahlen

Jahrgangsstufen	3/4
Fach	Mathematik

Kompetenzerwartungen

M 3/4 1 Zahlen und Operationen

M 3/4 1.2 Im Zahlenraum bis zur Million rechnen und Strukturen nutzen

Die Schülerinnen und Schüler...

- beschreiben arithmetische Muster und deren Gesetzmäßigkeit (z. B. beim Rechnen mit ANNA-Zahlen).
- entwickeln arithmetische Muster, setzen diese fort und verändern sie systematisch (z. B. Zahlenfolgen, Aufgabenfolgen und strukturierte Päckchen).

Prozessbezogene Kompetenzen: Argumentieren, Problemlösen

Aufgabe

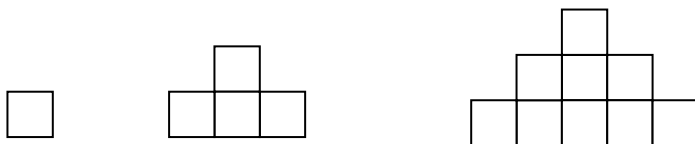
In der Aufgabe werden eine geometrische und eine arithmetische Folge zueinander in Beziehung gesetzt.

Die geometrische Folge zeigt eine nach einer Regel größer werdende Treppe. Die arithmetische Folge weist dieser die Anzahl der Quadrate, die für den Bau der Treppe jeweils nötig ist, zu (Quadratzahlen).

Der Bezug zwischen geometrischer und arithmetischer Folge wird durch das räumliche Umstrukturieren der geometrischen Folge hergestellt.

Hinweise zum Unterricht

Die Lehrkraft präsentiert folgende Zeichnungen:



Die Schülerinnen und Schüler beschreiben die Treppen.

Kompetenzorientierter Impuls:

Arbeitsteilige Gruppenarbeit: Wie viele Quadrate benötigt man für den Bau einer Treppe, bei der die höchste Stufe 7 Quadrate (8 Quadrate, 10 Quadrate, 12 Quadrate, 15 Quadrate) hoch ist? Überlege dir zunächst alleine einen Lösungsplan und löst die Aufgabe dann in der Gruppe. Schreibt die Lösung so auf, dass die anderen sie nachvollziehen können.

Reflexion/ Auswertung der Ergebnisse bzw. Vorgehensweise

Mögliche Äußerungen der Schülerinnen und Schüler:

- Wir haben eine Treppe aufgezeichnet und dann die Additionsaufgabe dazu gerechnet:
 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 64$
- Wir haben die Treppe nicht aufgezeichnet, sondern nur die Additionsaufgabe gerechnet.
- Wir haben nur die Treppen der einen Hälfte zusammengezählt.
 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$, dann die Zahl verdoppelt, so viele Stufen braucht man auf der rechten und linken Seite. Dann haben wir noch 9 für die höchste Stufe dazugezählt und so bei einer Treppenhöhe von 9 Stufen 81 Steine erhalten.

Die Ergebnisse der Schülerinnen und Schüler werden gesammelt und in einer Tabelle eingetragen

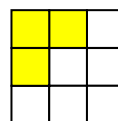
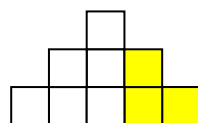
Höhe der Treppe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Quadrate insgesamt	1	4	9				49	64		100		144			225	

Kompetenzorientierter Impuls:

Ermittelt die Werte, die in der Tabelle noch fehlen. Was stellt ihr fest? Begründet.

Reflexion Auswertung der Ergebnisse

- Alle Ergebnisse sind Quadratzahlen.
- Begründung:

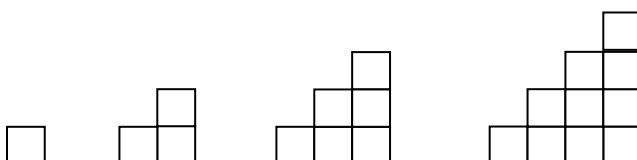


Anzahl der Steine

$$3 \cdot 3 = 9$$

Hinweise zum weiteren Lernen

Übertragung der Erkenntnisse auf Dreieckszahlen



Kompetenzorientierter Impuls

Wie viele Quadrate brauchst du für den Bau einer Treppe dieser Art, die 7 Quadrate hoch ist (evtl. arbeitsteilig analog zu Quadratzahlen)? Begründe.

Die Schülerinnen und Schüler ermitteln die Ergebnisse und tragen sie in eine Tabelle ein.

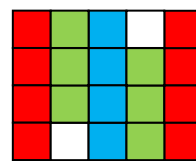
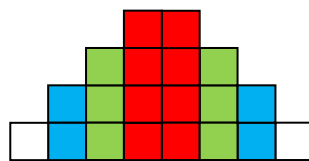
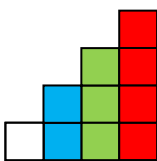
Höhe der Treppe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Quadrate insgesamt	1	3	6	10			28			55						

Regel der arithmetischen Folge: + 2,+ 3,+ 4,+ 5,+ 6,.....

Kompetenzorientierter Impuls:

Wie viele Quadrate braucht man für eine Treppe mit der Höhe 225?

Tipp: Verdopple die Dreieckszahl und ordne die Quadrate räumlich so an wie bei den Quadratzahlen.



Anzahl der Steine bei 4 Stufen

$$4 \cdot 5 : 2 = 10$$

Mögliche Äußerungen der Schülerinnen und Schüler:

- Es entsteht ein Rechteck.
- Die eine Seite ist 4 Kästchen hoch und die andere 5 Kästchen breit.
- Für dieses Rechteck braucht man 20 Quadrate.
- Für die Treppe brauchen wir nur halb so viele. Für die Treppe der „Höhe 4“ braucht man 10 Quadrate.

Übertragung der Erkenntnis auf eine Treppe mit der Höhe 225 (Differenzierung: Treppe mit geringerer Höhe):

$$225 \cdot 226 : 2 = 25425 \text{ (Für eine Treppe mit der Höhe 225 braucht man 25425 Quadrate.)}$$